L3 MASS 2005/06. Systèmes dynamiques. TD 4

Exercice 1 On revient à l'oscillateur harmonique, i.e. à l'équation

$$x'' + k^2\, x = \, c,$$

où c et k sont des constantes, avec k positive.
Rappeler d'abord la la solution générale (SG) de cette équation différentielle (EDO), exprimée à l'aide de sinus et de cosinus avec des coefficients réels. Réécrire ensuite cette EDO comme un système différentiel d'ordre 1 :

$$\dot{X} = A\ X + b,$$

en explicitant la matrice A et le vecteur b. Connaissant la SG $x(t)$ de l'EDO, et donc $x'(t)$, en déduire la solution générale (SG) $X(t)$ du système différentiel. Diagonaliser *ensuite* la matrice, et illustrer sur cet exemple le fait que la solution générale d'un système dynamique 2×2 à valeurs propres imaginaires pures correspond à un vecteur qui tourne dans le plan $\mathbb{R}^2$. On pourra considérer ici le vecteur $Y(t) := (k\, x(t), x'(t)$.

Exercice 2 Etudier la stabilité de l'origine pour le système :

$$\dot{X} = A\ X,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problème : Le Modèle de croissance cyclique de Goodwin

Le modèle de croissance cyclique de Goodwin correspond à l'évolution au cours du temps du marché de l'emploi, et des parts de salaires dans le revenu national d'une économie. On note respectivement x_t, et y_t le taux de demande d'emploi, et la part des salaires dans le revenu national au temps t. Ces deux quantités peuvent être déterminées en fonction de cinq paramètres économiques :
Le stock de capital K_t, la production Y_t, l'emploi courant L_t, l'offre de travail N_t, et enfin le taux de salaire réel w_t. En supposant que la demande de travail est déterminée par le plein emploi du capital, nous avons

$$x_t = L_t / N_t \quad \text{et} \quad y_t = w_t L_t / Y_t$$

Nous conviendrons par la suite que les taux de variation de l'emploi et des salaires sont de la forme suivante

$$N'/N = \nu \qquad L'/L = -\beta + K'/K \quad \text{et} \quad w'/w = \ \pi\ x - \gamma$$

avec $\nu, \beta, \gamma > 0$, et $\pi > (\beta + \gamma)$. On supposera que le capital est proportionnel à la production, et l'investissement K' est égal au profits :

$$K = \frac{1}{h}\ Y \quad \text{et} \quad K' = Y - w\ L \quad \text{avec} \quad h > (\beta + \nu)$$

1. Vérifier que (x_t, y_t) satisfait le couple d'équations différentielles suivantes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & a\ x - bxy \\ y' & = & -c\ y + dxy \end{array} \right.$$

   avec un jeu de paramètres (a, b, c, d) que l'on déterminera en fonction de (ν, β, π, h). Déterminer les états stationnaires de ce système.
2. Décrire le système différentiel normalisé correspondant au changement de variables :

$$\tau = a\ t, \quad u = \frac{d}{c}\ x \quad \text{et} \quad v = \frac{b}{a}\ y$$

   Établir dans le plan de phase (u, v), les coordonnées des états stationnaires.
3. Linéariser le système normalisé autour des états stationnaires. Déterminer les types de singularité, et la nature de la stabilité autour de ces points.
4. Décrire le diagramme des phases correspondant au système normalisé (u, v).
5. Montrer que la fonction

$$H(u, v) = \log\left(u^{\alpha} v\right) - (\alpha u + v) \quad \text{avec} \quad \alpha = c/a$$

   est une intégrale première du mouvement.
6. Vérifier que l'évolution de l'économie est cyclique. Autrement dit, vérifier que les trajectoires solutions du système différentiel (normalisé) sont périodiques. On analysera les points suivants :
   - Les trajectoires ne peuvent sortir du demi-plan supérieur $(\mathbb{R}_+^{\star})^2$.
   - Les trajectoires n'explosent pas en temps fini.
   - Les trajectoires initialisées dans le cadran $C_1 = (0,1)^2$, retournent en C_1 en temps fini, en passant successivement par les trois autres quadrants $C_2 = ((1,\infty) \times (0,1))$, $C_3 = (1,\infty)^2$, et $C_4 = ((0,1) \times (1,\infty))$.
   - Les trajectoires passant par un point $(u(\tau_1), 1)$, avec $u(\tau_1) \in (0,1)$, retournent en temps fini en ce point.
7. Calculer les moyennes temporelles de $u(\tau)$, et de $v(\tau)$, sur une période.