Université de Nice Sophia-Antipolis 2009 - 2010
L3 Mass. Calcul différentiel

Contrôle du 20/10/2009

Durée : 1H 15. Documents autorisés : aucun pour la question 1, ensuite une page recto-verso, calculettes interdites

1. Question de cours. Corrigé : voir cours!

2. Etudier la fonction $f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0,0) = 0$. Est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle C^2? Justifiez votre réponse. Donner si c'est possible un développement limité à l'ordre 2 de f à l'origine.

Corrigé. On a déjà étudié cette fonction en TD, voir corrigé de la feuille TD1. Par exemple, ses dérivées premières en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ sont:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{x^4y^3 + 3x^2y^5}{(x^2+y^2)^2}\,; \partial_y f(x,y) = \frac{x^3y^4 + 3x^5y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

et à l'origine on les calcule directement en revenant à la définition. Par exemple,

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \to 0} h^{-1}\left(f(h,0) - f(0,0)\right) = 0,$$

car $\forall h$, $f(h,0) = 0$. De même, $\partial_y f(0,0) = 0$. On montre ensuite la continuité de ces dérivées premières à l'origine en montrant e.g. que

$$|\partial_x f(x,y) - \partial_x f(0,0)| \leq 3|y|^3 + 3|y|^3 = 6|y|^3 \to 0 \text{ quand } (x,y) \to (0,0).$$

Donc la fonction f est C^1 à l'origine, qui était le seul point litigieux, donc aussi sur $\mathbb{R}^2$, et $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.

On raisonne de même sur les dérivées secondes. Par exemple,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} h^{-1}\left(\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)\right) = 0,$$

car $\forall h, \partial_y f(h(,0) = 0$. On démontre encore que les quatre dérivées secondes de f sont continues, y compris à l'origine, où elles sont nulles, et que naturellement (lemme de Schwarz) les dérivés secondes mixtes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont égales en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ce qui fait tout marcher est le fait que f soit homogène de degré 4, et donc ses dérivées secondes homogènes de degré 2, ce qui assure leur continuité et leur nullité à l'origine.

Finalement, le DL2 de f à l'origin est très simple:

$$f(x,y) = f((0,0) + 0 + 0^2 + \circ(||(x,y)||^2),$$

puisque le gradient et la matrice Hessienne de f sont nul(le)s à l'origine.

3. Calculer les extrema (s'il y en a) et les points d'extremum correspondants (?) de la fonction

$$f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 8x - 2y + 3$$

sur le domaine $\mathbb{R}^2$. On pourra chercher d'abord les points critiques de f et examiner si ces points sont ou non des points de minimum ou de maximum local. Que pensez-vous du reste dans le DL2 de f en un tel point?

Corrigé. La fonction f estC^∞, donc continue sur $\mathbb{R}^2$, qui n'est pas compact (= fermé borné). Donc il n'y a pas de résultat général permettant d'affirmer l'existence de points d'extrermum pour f sur $\mathbb{R}^2$. On peut par contre chercher les points critiques de f. En un tel point (x,y) on a donc :

$$\partial_x f(x,y) = 10x - 2y + 8 = 0 \text{ et } \partial_y f(x,y) = -2x + 4y - 2 = 0,$$

d'où $x = y = 1$. Donc f a un unique point critique $a = (1,1)$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour savoir si ce point esrt un point de minimum ou de maximum local, on étudie la matrice Hessienne de f en ce point :

$$A := H(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice st symétrique réelle, donc ses valeurs propres sont réelles. Leur produit est égal au déterminant $\Delta = 36$ de A, donc les deux valeurs propres sont de même signe, et elles sont toutes deux positives, car leur somme égale la trace $tr(A) = 14$ de A. Donc la matrice A est définie-positive, et donc a est un pointe de minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$. En fait, f étant un polynôme de degré 2 en x, y, la matrice Hessienne est la même en tout point, et le reste du DL2 de f en tout point, y compris en a, *est identiquement nul.* On peut donc écrire en *tout point* (x,y), même éloigné de $a = (1,1)$:

$$f(x,y) = f(1,1) + (0,0).\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-, y-1)\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix},$$

et puisque le reste est identiquement nul et la matrice A définie-positive, on en déduit que $\forall (x,y) \neq (1,1)$, $f(x,y) > f(1,1) = -2$. Donc f admet un minimum en un point unique $a = (1,1)$. Par contre, elle n'admet pas de maximum, car on peut montrer (non demandé) que $f(x,y) \to +\infty$ quand $||(x,y)|| \to +\infty$.

4. Identité d'Euler pour les fonctions homogènes. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On suppose f homogène de degré α, i.e.

$$\forall x, y, \forall \lambda > 0, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y). \tag{1}$$

Montrer d'abord en revenant e.g. à la définition de $\partial_x(\lambda x, \lambda y)$ que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont des fonctions homogènes, dont on précisera le degré (on pourra poser $h = \lambda h'$).

Ensuite, en dérivant les deux membres de (1) par rapport à λ et en détaillant l'application du théorème de dérivation des fonctions composées, montrer qu'on obtient finalement:

$$\forall x, y,\, x\partial_x f(x,y) \,+\, y\partial_y f(x,y) = \alpha\, f(x,y).$$

Corrigé. On a d'abord pour tout (x, y) et pour tout $\lambda > 0$:

$$\partial_x f(\lambda x, \lambda y) = \lim_{h\to 0} h^{-1}\,(f(\lambda x + h, \lambda y) - f(\lambda x, \lambda y)).$$

En posant $h = \lambda h'$ et en utilisant l'homogénéité de f, on en déduit :
$\partial_x f(\lambda x, \lambda y) = \lim_{h'\to 0}\,(\lambda\, h')^{-1}\,(f(\lambda(x + h'), \lambda y) - f(\lambda x, \lambda y)) =$
$\lambda^{\alpha-1}\partial_x f(x, y)$,
et de même pour $\partial_y f$.
Ensuite, on pose pour tout (x, y) fixé : $u(\lambda) = \lambda x$, $v(\lambda) = \lambda y$ et $g(\lambda) :=$ $f(u(\lambda), v(\lambda)) = f(\lambda x, \lambda y))$. En dérivant cette fonction composée g, on obtient :

$$g'(\lambda) = \partial_x f(u, v).u'(\lambda) + \partial_y f(u, v).v'(\lambda) = x\partial_x f(\lambda x, \lambda y)) + y\partial_y f\lambda x, \lambda y).$$

On revient à (1). En dérivant les deux membres par rapport à λ et en utilisant l'homogégéité de $\partial_x f$ et $\partial_y f$, on en déduit que

$$g'(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}\,(x\partial_x f(x, y)) + y\partial_y f(x, y) = h'(\lambda) = \alpha\,\lambda^{\alpha-1} f(x, y),$$

où $h(\lambda) := \lambda^\alpha f(x, y)$, ce qui démontre l'identité d'Euler.