L3 Mass
Calcul différentiel
2010/2011

TD 3

1. Exemple de question de cours :

A. Donner la définition d'une fonction f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en un point $M_0 := (x_0, y_0, z_0)$, et écrire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de ce point.
On suppose que f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ au point (x_0, y_0, z_0) . Est-elle différentiable en ce point?
B. Que dit le lemme de Schwarz?

2. Préciser la régularité et donner ensuite, si c'est possible, le gradient, la matrice Hessienne et le développement limité à l'ordre 2 à l'origine des fonctions suivantes

$$f(x, y) = \arctan(x + y^2),\ g(x, y) = \ln(1 + xy).$$

3. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On suppose que

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

On pose : $F(\rho, \theta) := f(x, y)$, avec $(x, y) := \Phi(\rho, \theta) := (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Donner la matrice jacobienne, i.e. la différentielle, de Φ en un point quelconque (ρ, θ) et en déduire l'expression des dérivées $\partial_\rho F$ et $\partial_\theta F$ en fonction de $\partial_x f$ et $\partial_y f$ et des dérivées de Φ.
Montrer ensuite que si une fonction f vérifie (1), alors elle est radiale, i.e. il existe $G \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $f(x, y) = F(\rho, \theta) \equiv G(\sqrt{x^2 + y^2})$. En d'autres termes, montrer qu'alors $f(x, y)$ ne dépend que de la distance de (x, y) à $(0, 0)$.

4. Etudier la fonction $f(x, y) = y^2 \sin \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$. Préciser en quels points cette fonction est C^1. Est-elle différentiable à l'origine? Si oui, expliquer pourquoi, et donner son DL1 à l'origine. Est-elle C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

5. Les matrices suivantes sont-elle définies positives, définies négatives, indéfinies ?

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$