Ch 5. Séries de Fourier

§1 - Polynômes trigonométriques - Premiers résultats. Théorie L^2.

- Références (parmi beaucoup d'autres !!!) un chapitre de :

[MS] : Michelle Schatzman, Analyse Numérique, Inter Editions
ou (pour les applications aux EDP) de
[WS] : Walter Strauss : PDE (Partial Diff. Equations), Wiley
ou (plus complet) de
[ZQ] : C. Zuily, H. Queffélec : Eléments d'Analyse pour l'Agrégation, Masson

A) Généralités.

On suit ici la présentation de [MS], puis de [ZQ].

- Polynôme trigonométrique : c'est une expression du type :

$P(x) := \sum_{|k| \leq N} a_k e^{2i\pi k x}$, où $x \in \mathbb{R}$, les $a_k \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$ est le degré.

On note Π_N l'e.v. des Pol-Trigo. de $d^\circ \leq N$. C'est un e.v. de dim. $(2N+1)$, de fonctions 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

- On note $C^0_\#$, $C^k_\#$ l'e.v. sur $\mathbb{C}$ des fonctions 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,

et $\mathcal{L}^1_\#$, $\mathcal{L}^p_\#$ l'e.v. (sur $\mathbb{C}$) des fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 1-périodiques : p.p. $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x) = 0$.

Alors on pose : $\int_\# f(x)\,dx := \int_a^{a+1} f(x)\,dx$ (c'est indépendant de $a \in \mathbb{R}$).

- De même, on pose $\left(\int_\# |f(x)|^p dx\right)^{1/p} := \left(\int_a^{a+1} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall p \in [1, +\infty[$.

- Cette semi-norme sur $\mathcal{L}^p_\#$ devient une norme sur l'espace-quotient $L^p_\#$ de $\mathcal{L}^p_\#$ par la relation d'équivalence $f \equiv g$ ssi $f - g = 0$ p.p.

- On rappelle encore que pour cette norme, notée $\|f\|_p$, $L^p_\#$ est un espace de Banach $\forall p \in [1, +\infty[$,

et un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$(f, g)_\# := \int_\# f(x)\,\bar{g}(x)\,dx$ pour $p = 2$.

- on rappelle aussi que $L^\infty_\#$ est un Banach pour $\|f\|_\infty = \sup_x \text{ess} |f(x)| \ldots$

. <u>Thm 1</u> : (i) Soit $f \in C^0_\#$. Alors $\forall N \in \mathbb{N}$, f admet une unique projection $\perp$ $P := P_{\Pi_N} f$ sur Π_N : $\|P - f\|_2 = \inf_{Q \in \Pi_N} \|Q - f\|$, i.e. $P \in \Pi_N$ vérifie :

$$\int_\# |P - f|^2 dx = \inf_{Q \in \Pi_N} \int_\# |Q - f|^2 dx \qquad (1)$$

(ii) De plus, la suite $\{e^{2ik\pi x}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est $\perp$normale pour $(\cdot, \cdot)_\#$. Donc

$$\begin{cases} P = P_{\Pi_N} f = \sum_{|k| \le N} \hat{f}(k) e^{+2ik\pi x}, & \text{où le coeff}^t \text{ de Fourier} \qquad (2) \\ \hat{f}(k) = (f, e^{2ik\pi x})_\# = \int_\# f(x) e^{-2ik\pi x} dx, & \forall |k| \le N. \end{cases}$$

(iii) De plus, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|\hat{f}(k)| \le \|f\|_1$. (3)

<u>Dém.</u> cf Ch. 3 sur les espaces de Hilbert. Il suffit de vérifier que $\forall j, k \in [-N, +N] \cap \mathbb{Z}$, on a

$$\int_\# e^{+2i\pi jx} \cdot e^{-2i\pi kx} dx = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi(j-k)} \left[e^{-2i\pi kx}\right]_a^{a+1} = 0, & j \ne k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

d'où (i) et (ii), et que (3) est évident. $\square$

. <u>Rem 1</u>. <u>On a le m̄ résultat</u> <u>$\forall f \in L^p_\#$, $1 \le p \le +\infty$.</u> En particulier, $\forall f \in L^2_\#$, <u>ses coefficients de Fourier $\hat{f}(k)$ vérifient</u> : $\forall N$, $\sum_{|k| \le N} |\hat{f}(k)|^2 \le \|f\|_2^2 = \int_\# |f|^2 dx$, d'où : $\forall n, p$ $\sum_{k=-n}^{+p} |\hat{f}(k)|^2 \xrightarrow[n,p \to +\infty]{} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \le \|f\|_2^2$. (4)

<u>(inégalité de Bessel)</u>. <u>Quand on aura démontré que les $\{e^{2ik\pi x}\}$ forment une base hilbertienne de $L^2_\#$</u>, on en déduira que l'égalité dans (4) caractérise les fonctions de $L^2_\#$, cf + loin. $\square$

B) Densité des Polynômes trigonométriques dans $C^0_\#$.

- Première méthode : utiliser le Thm de Stone-Weierstrass, cf e.g. [FP] : F. Poupaud, Analyse Fonctionnelle, Univ. de Nice-Sophia.
- Deuxième méthode [MS] :

voir aussi le Thm 11 (Thm de Féjer). On montre d'abord :

Lemme 1 : On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_n(x) = (1+\cos 2\pi x)^n$, $Q_n(x) = P_n(x) / (\int_\# P_n(x)\,dx)$. Alors $\forall n$, $Q_n \in \Pi_n$, $\left\{\begin{array}{l} Q_n(x) \geq 0 \\ \int_\# Q_n(x)\,dx = 1 \end{array}\right\}$ et $\forall \alpha \in]0,\frac{1}{2}]$, $\displaystyle\int_\alpha^{1-\alpha} Q_n(x)\,dx \underset{(n\to+\infty)}{\to} 0$. (5)

Dém. $\forall n, \forall x$, $P_n(x)$ et $Q_n(x) \geq 0$. De plus

$$P_n(x) = \left(1 + \frac{e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x}}{2}\right)^n \in \Pi_n, \text{ et } \int_\# Q_n\,dx = 1.$$

Pour montrer (5), par symétrie / à $x = \frac{1}{2}$, on se ramène à montrer que $A_n := \displaystyle\int_\alpha^{1/2} P_n(x)\,dx \Big/ \Big(\int_0^{1/2} P_n(x)\,dx\Big) \underset{(n\to+\infty)}{\to} 0$.

Or $\displaystyle\max_{\alpha \leq x \leq 1/2} P_n(x) \leq (1+\cos 2\pi\alpha)^n$, et d'autre part

$$\int_0^{1/2} P_n(x)\,dx \geq \int_0^{\alpha/2} P_n(x)\,dx \geq \frac{\alpha}{2}(1+\cos \pi\alpha)^n.$$

Donc $\forall n$, $0 \leq A_n \leq \dfrac{(1+\cos 2\pi\alpha)^n}{\frac{\alpha}{2}(1+\cos \pi\alpha)^n} := \dfrac{2}{\alpha}(r_\alpha)^n \underset{\substack{(n\to+\infty)\\ \forall \alpha \text{ fixé}}}{\to} 0$

car $\forall \alpha \in]0,\frac{1}{2}]$, $0 < r_\alpha < 1$. □

- On montre ensuite :

Prop 1 : L'ensemble Π_N des Pol-trigo 1-périodiques est dense dans $C^0_\#$.

Dém. : idée.

- on pose $f_n(x) := \int_\# f(x-y)\,Q_n(y)\,dy$, on montre que f_n est 1-périodique (et continue) et, par changement de variable dans $\int_\#$, que $f_n \in \Pi_n$.

(*) poser $z = x - y$

. on estime ensuite la différence entre f_n et f à l'aide du Lemme 1, en choisissant ($\forall \varepsilon > 0$) un $\alpha > 0$ tq le <u>module de continuité</u> $\omega(\alpha) := \sup_{\substack{x,y \in [0,1] \\ |x-y| \leq \alpha}} |f(x) - f(y)|$ soit $< \varepsilon$..

. <u>Exo</u> 1 : vérifier les détails, cf [MS]. $\square$

. <u>Conséquence</u> :

<u>Thm 2</u>

$\forall f \in C^0_{\#}$, les sommes partielles de Fourier de f :

$$S_N(f) := \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k)\, e^{2i\pi kx} := \sum_{|k|\leq N} \hat{f}(k) e_k(\cdot) \qquad (6)$$

convergent vers f dans $L^2_{\#}$: $\int_{\#} |f - S_N(f)|^2 dx \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

et de plus on a la relation de Parseval :

$$\int_{\#} |f|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2. \qquad (7)$$

En particulier, <u>$\forall f \in C^0_{\#}$</u>, <u>$\hat{f}(k) \to 0$ $(k \to \pm\infty)$</u>. $\qquad (7')$

<u>Dém</u>. Utilisons $Q = f_n$ introduite au thm 2. D'après Pythagore, $\forall f \in C^0_{\#} \subset L^2_{\#}$, on a pour $n = N$

$$\| f - S_N(f)\|_2^2 + \|S_N f - f_N\|_2^2 = \| f - f_N\|_2^2 \leq (1 . \|f - f_N\|_\infty)^2 \underset{(N\to+\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\|f - S_N f\|^2 \underset{(N\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$. De plus, encore d'après Pythagore,

$$\underbrace{\| f - S_N f\|_2^2}_{\substack{\to 0 \\ N\to+\infty}} + \|S_N f\|_2^2 = \| f\|_2^2 . \text{ Donc}$$

$$\|S_N f\|_2^2 = \sum_{|k|\leq N} |\hat{f}(k)|^2 \underset{(N\to+\infty)}{\nearrow} \| f\|_2^2, \text{ d'où (7), et (7')}. \square$$

. Ceci n'entraîne pas encore que les $(e^{2i\pi kx})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $L^2_{\#}$. <u>Ceci n'entraîne pas non plus la CV de $S_N f$ vers $f \in C^0_{\#}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$</u> !!

c) Autres résultats de densité :

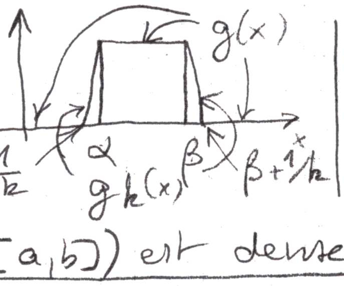
. Rappel : $\forall f \geq 0$, on dit que $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ si f est mesurable (Lebesgue) de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+$ et si
$$\int_{[a,b]} f \, dx := \sup\Big\{ \int_{[a,b]} g\, dx,\ \underbrace{0 \leq g \leq f}_{g \text{ étagée}} \Big\} < +\infty$$
(dx : mesure de Lebesgue)

. on dit que $f = f_+ - f_- \in \mathcal{L}^1([a,b])$ si f_+, f_- et $|f| = f_+ + f_- \in \mathcal{L}^1([a,b])$, et de m̄ pour $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

. Donc, par construction, $\forall f \in \mathcal{L}^1([a,b])$, $f \geq 0$
$\exists$ une suite (f_n) de fonctions étagées (≥ 0) tq
$f_n \nearrow f$, $f_n(x) = \sum_{\text{finie}} \alpha_{n,k} \mathbb{1}_{[a_{n,k}, b_{n,k}]}(x)$, et
$$\int_{[a,b]} |f_n - f| \, dx = \int_{[a,b]} (f_n - f)\, dx \underset{(n \to +\infty)}{\longrightarrow} 0$$

. Finalement, $\forall \dot{f} \in L^1(a,b) := L^1([a,b]) = L^1(]a,b[)$,
$\exists$ une classe d'équivalence $(\dot{f}_n)$ de fonctions étagées tq $\|\dot{f}_n - \dot{f}\|_{L^1(a,b)} \underset{(n \to +\infty)}{\longrightarrow} 0$:
l'ensemble $\mathcal{E}$ des (classes de) fonctions étagées est dense dans $L^1(a,b)$.

. Par ailleurs, toute fonction étagée g est limite dans L^1 d'une suite de fonctions g_k continues, sur $[a,b]$:



En combinant ces deux résultats, on obtient (exercice) :

thm 3 :

L'espace $C^0([a,b])$ est dense dans $L^1(a,b)$. De même, (exo) l'espace $C^0_\#$ est dense dans $L^1_\#$, donc dans $L^p_\#$, $\forall p < +\infty$.

· <u>Application</u> : <u>Prolongement</u>

<u>Thm 4</u> : cf e.g. [FP] ou [HB] (H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Masson).

(i) Soient E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, (resp. deux " métriques complets) et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs de E dans F, linéaires, uniformément bornés en norme d'opérateurs :

$$\exists K>0 ; \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in E, \|A_n x\|_F \le K\|x\|_E$$

(resp. les A_n sont uniformément équicontinus de E dans F :

(*) $\forall \varepsilon>0, \exists \alpha(\varepsilon)>0 ; \forall n\in\mathbb{N}, \forall x,y\in E, d_E(x,y)<\alpha \Rightarrow d_F(A_n x, A_n y)<\varepsilon$)

(ii) Supposons de plus qu'il $\exists D\subset E$, <u>D dense dans</u> E, tq $\forall x\in D$, $\lim_{n\to\infty} A_n x := A_D$ existe dans F.

Alors $\exists$ une application continue unique $A : E \to F$ qui prolonge A_D à E tout entier. Dans le 1^{er} cas A est linéaire, de norme $\le K$ et dans le $2^{ème}$ cas, A est uniformément continue de E dans F, avec le même <u>module de continuité</u> que dans la relation (*) ci-dessus, i.e. $\varepsilon = \omega(\alpha)$, avec la même fonction ω.

· <u>Dém.</u> classique (admise).

· <u>Exo 2</u> : cf e.g. [ZQ]. Démontrer, à partir du Thm 4, le Thm 5 ci-dessous en étudiant $l : g \mapsto \int_{\#} g(x)\, e^{2ik\pi x} dx$, et en étudiant :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta e^{2ik\pi x}\, dx . \quad \square$$

<u>Thm 5</u> : Riemann-Lebesgue (***).

Soit $f\in L^1_{\#}$. Alors $\lim_{k\to+\infty} \hat{f}(k) = 0$.

D) Thm 6 Riesz-Fischer ; Parseval (****)

(i) $\forall f \in L^2_\#$, les sommes partielles de Fourier de rang N cv vers f dans $L^2_\#$: les $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forment donc une base hilbertienne de $L^2_\#$ (9)

De plus $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \int_\# |f|^2 dx$ (Parseval)

et (forme "polarisée") :

$$\forall f,g \in L^2_\# \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}}(k) = (f,g)_\# = \int_\# f(x)\overline{g(x)}\,dx. \quad (10)$$

(ii) Réciproquement, si une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}$ vérifie : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty$, alors la somme de la série $\{x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2i\pi kx}\}$ converge dans $L^2_\#$ vers la fonction $f \in L^2_\#$ dont les coeff^ts de Fourier sont les a_k.

(iii) L'application : $f \in L^2_\# \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est donc une isométrie de $L^2_\#$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$: l'e.v. des suites à termes complexes, tq $\|a\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty$.

- Dém. Soient $E = F = L^2_\#$, et $A_N : f \mapsto A_N f := S_N f$.

D'après l'inégalité de Bessel (4),

$\forall N, \forall f \in E, \ \|S_N f\|_2 \le \|f\|_2$.

De plus, Thm 2, $\forall f \in D := C^0_\#$ dense dans E,

$\|S_N f - f\|_2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut donc appliquer le thm 4. Donc $\forall f \in E = L^2_\#$, $S_N f \to f$ dans $L^2_\#$, et donc $\|S_N f\|_2^2 \underset{(N\to+\infty)}{\longrightarrow} \|f\|_2^2$ (calcul direct, ou continuité de $f \mapsto \|f\|$: 2ème inégalité du triangle). On a donc Parseval, et donc (10), car $\forall f, g$,

$$(f,g)_\# = \frac{1}{4}\Big[(f+g,f+g)_\# - (f-g,f-g)_\# + i(f+ig,f+ig)_\# - i(f-ig,f-ig)_\#\Big]. \quad (11)$$

. Réciproquement, si on pose $f_N(x) := \sum_{|k|\leq N} a_k e^{2ik\pi x}$,
on obtient $\forall M > N$,
$$\|f_M - f_N\|_2^2 = \sum_{k=N+1}^{M} |a_k|^2 \xrightarrow[M,N \to +\infty]{} 0 .$$
(indépendamment)

Donc la suite (f_N) est de Cauchy dans $L^2_\#$ (complet). Soit f sa limite. On fixe k qlcq. Alors $\forall N \geq |k|$, $\hat{f}_N(k) = a_k$. Par continuité, on en déduit $\hat{f}(k) = a_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. □

§2. Autres résultats de CV. Convolution. Thm de Fejer...

A) Autres résultats (I):

. Lemme 2 : Soit $f \in C^p_\#$, i.e. $f \in C^p(\mathbb{R};\mathbb{C})$, f 1-périodique.

Alors $\forall m$ entier $\leq p$, $\exists C_m > 0$ tq
$$\forall k \neq 0, \ |\hat{f}(k)| \leq \frac{C_m}{|k|^m}. \qquad (12)$$

Dém. On a déjà vu le résultat pour $p=0$: $\forall f \in C^0_\#$, $\hat{f}(k) \xrightarrow[(k \to +\infty)]{} 0$. Pour $m = 1, \dots, p$, on se ramène au cas $m=0$ en intégrant par parties sur $[0,1]$: e.g.
$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi kx} dx = \cancel{\left[f(x) \frac{e^{-2i\pi kx}}{-2i\pi k}\right]_0^1} - \int_0^1 \frac{f'(x) e^{-2i\pi kx}}{-2i\pi k} dx,$$
$\cancel{\ldots} = 0$, donc $\hat{f}(k) = \dfrac{\widehat{f'}(k)}{2i\pi k}$, et $\widehat{f'}(k) \xrightarrow[(k \to +\infty)]{} 0$, donc $\exists C_1 > 0$
$|\widehat{f'}(k)| \leq C_1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. □

***

. Lemme 3 : Soit $f \in L^1_\#$. Supposons que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$. (13)

Alors, la série $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2i\pi kx}\right)$ CV normalement [(pour $\|\cdot\|_\infty$)] donc uniformément sur $\mathbb{R}$: $S_N(f) \to Sf$ $(N \to +\infty)$. Enfin, $Sf = f$ p.p.

Ex 3 : montrer qu'en particulier (13) est vérifiée si : $\boxed{\sum (1+k^2) |\hat{f}(k)|^2 < +\infty}$ (13').

Dém. : $\forall M > N$, $|S_M(f) - S_N(f)|(x) \leq \sum_{N<|k|\leq M} |\hat{f}(k) e^{2i\pi kx}|$

$\leq \sum_{N<|k|\leq M} |\hat{f}(k)| \xrightarrow[(M,N\to+\infty \text{ indépendamm}^t)]{} 0$

- Donc la suite $(S_N(f))$ est de Cauchy dans $C^0_\#$, donc cv uniformément vers une limite $Sf \in C^0_\#$.
- On veut montrer que $Sf = f$ p.p. D'abord, $f \in L^1_\#$, et $\forall N$, on a

$$\sum_{|k|\leq N} |\hat{f}(k)|^2 \leq \sum_{|k|\leq N} \|f\|_1 |\hat{f}(k)| \leq \underbrace{\|f\|_1 \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|}_{c^{te} \text{ indép. de } N}.$$

Donc (Thm 6), $f \in L^2_\#$, et donc $\|S_N f - f\|_2 \xrightarrow[(N\to+\infty)]{} 0$. Par ailleurs

$\|S_N f - Sf\|_2 \leq 1 . \|S_N f - Sf\|_\infty \xrightarrow[(N\to+\infty)]{} 0$.

- Donc $f = Sf$ p.p. sur $\mathbb{R}$, et donc <u>f est p.p. égale à une fonction continue Sf</u> [⚠ cette propriété est beaucoup + forte que : f est continue p.p., exemple : $f(x) = H(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$!!], et $S_N f \xrightarrow[N\to+\infty]{} Sf$ uniformément sur $\mathbb{R}$. □

- <u>Corollaire 1</u> : soit $f \in L^1_\#$. Alors $f = 0$ p.p. ssi tous ses coeff^{ts} de Fourier sont nuls.

<u>Dém.</u> Si $f = 0$ p.p., alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(k) = 0$.
Réciproq^t, si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(k) = 0$, alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| = 0 < +\infty$, et d'après le Lemme 3, f est la limite uniforme de $S_N f \equiv 0$, $\forall N$, donc $f \equiv 0$.

- <u>Corollaire 2</u> : si $f \in L^2_\#$ est primitive d'une fonction $g \in L^2_\#$:
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(y) - f(x) = \int_x^y g(t)\,dt$, (14)
alors (13') est vérifiée, car alors $\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + 4k^2\pi^2)|\hat{f}(k)|^2$. (15)
On dira qu'alors $f \in H^1_\#$.

<u>Dém.</u> <u>Exo 4</u> : □

B) Convolution (rappels) : D'abord, $\forall f, g \in C^0_\#$ $\{f*g : x \mapsto \int_\# f(x-y)\, g(y)\, dy\} \in C^0_\#$. De plus, cette opération est commutative, associative (par Fubini), et $\forall f, g \in C^0_\#$, $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Par densité de $C^0_\#$ dans $L^1_\#$, on étend classiquement ceci :

$\forall f, g \in \mathcal{L}^1_\#$, $(f*g)(x) = \int_\# f(x-y)\, g(y)\, dy$ est définie p.p. x, et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. (16)

. Prop 2 : soient $f, g \in L^1_\#$. Si $f \in C^m_\#$, $f*g \in C^m_\#$, et $\forall k \leq m$, $\frac{d^k}{dx^k}(f*g) = \frac{d^k f}{dx^k} * g$, avec
$$\max_x \left|\frac{d^k}{dx^k}(f*g)(x)\right| \leq \max_x \left|\frac{d^k f}{dx^k}(x)\right| \cdot \|g\|_1 .$$
Si $f, g \in L^2_\#$, alors $f*g \in C^0_\#$, et
$$\|f*g\|_\infty := \max_x |(f*g)(x)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \qquad (17)$$
Autre exemple : si $f \in L^1_\#$ et $g \in L^2_\#$, alors $f*g \in L^2_\#$ et $\|f*g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$. (18)

. Dém. cf Cours de Distributions pour le cas non périodique. Pour le cas C^m, appliquer le thm de dérivation sous le signe $\int$ à $\{x \mapsto \int_\# f(x-y)\, g(y)\, dy\}$.
Dans le cas $m = 0$, si $f \in C^0_\#$, alors
$$\left|\int_\# f(x-y)\, g(y)\, dy\right| \leq \|f\|_\infty \cdot \int_\# |g(y)|\, dy .$$
Pour montrer (17), on utilise Cauchy-Schwarz : $\forall x$,
$\left|\int_\# f(x-y)\, g(y)\, dy\right| = |f(x)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$, ($\forall f, g \in C^0_\#$) et on utilise encore la densité de $C^0_\#$ dans $L^2_\#$ et (e.g.) le Thm 4 pour étendre le résultat à $f, g \in L^2_\#$.

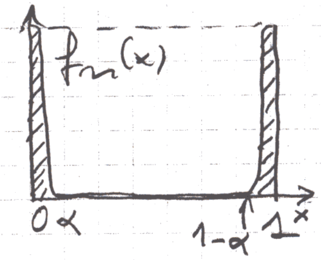
Enfin, la démonstration de (18) combine (17) et l'égalité classique — cf cours de Distrib. —

$$(f * g * \check{h})(0) = \int_\# (f*g)(y)\, \check{h}(0-y)\,dy = (f*g, \bar{h})_\# ,$$

où $\check{h}(x) := h(-x)$. $\square$

Thm 7 : $\ast\ast\ast$ (Suite régularisante, cas périodique).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1_\#$, tq



(i) $\forall n, \displaystyle\int_\# f_n(x)\,dx = 1$ (19)

(ii) $\forall n, \|f_n\|_1 \leq K$ (20)

(iii) $\forall \alpha > 0, \displaystyle\int_\alpha^{1-\alpha} |f_n(x)|\,dx \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$ (21)

Alors $\forall g \in \begin{cases} L^1_\#, \\ L^p_\#, \\ C^0_\# \end{cases} \|f_n * g - g\|_{\left.\begin{matrix}1\\p\\\infty\end{matrix}\right\}} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$, et (22)

et $\forall g \in C^m_\#, m\in\mathbb{N}, \displaystyle\max_{0\leq k\leq m} \left\|\frac{d^k}{dx^k}(f_n * g - g)\right\|_\infty \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$ (23)

!! **Rem.** : Evidemment, si $f_n \geq 0$, (i) $\Rightarrow$ (ii) avec $K=1$!!

Dém. (idée). On a déjà utilisé ces idées au lemme 1 et au thm 2, mais cette fois-ci, les f_n ne sont pas nécessairement ≥ 0. Soit $\omega(.)$ le module de continuité de g, supposée continue. On a :

$$|(f_n * g)(x) - g(x)| \leq 2\left(\int_\alpha^{1-\alpha}|f_n(y)|\,dy\right)\cdot\|g\|_\infty + \underbrace{\left(\int_0^\alpha |f_n(y)|\,dy + \int_{1-\alpha}^1 |f_n(y)|\,dy\right)}_{\leq K}\cdot\,\omega(\alpha) \tag{24}$$

$\forall \varepsilon > 0$, fixons α tq $K\omega(\alpha) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis, grâce à (iii), $n \geq n_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon)$ assez grand pour que $2\int_\alpha^{1-\alpha}|f_n|\,dy \cdot \|g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit le résultat si g est continue. On utilise ensuite le Thm 4... $\square$

déduit que $\max_x |(f_n * g)(x) - g(x)| \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$, si $g \in C^0_\#$.

On étend ensuite ce résultat pour $g \in L^1_\#$, grâce encore au thm 4 : $E = F = L^1_\#$, $A_n g := f_n * g$, $D = C^0_\#$.

Si $g \in L^2_\#$, le m̄ thm (avec $E = F = L^2_\#$) entraîne (22)

car $\|A_n g\|_2 \le \|f_n\|_1 \cdot \|g\|_2 \le K \|g\|_2$.

Ensuite, on obtient (23) à partir de (22) en considérant les dérivées de $(f_n * g)$.

Finalement, on passe du cas L^2 au cas L^p grâce à :

$$|(f_n * g)(x) - g(x)|^p = \left|\int_\# f_n(y)(g(x) - g(y))\,dy\right|^p \quad (\text{d'après } (i)),$$

$$\le \int_\# (|f_n(y)|\,|g(x)-g(y)|)^{1/p} |g(x)-g(y)|^{1/q}\,dx, \text{ avec}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On applique ensuite l'inégalité de Hölder, puis on intègre en x, Fubini, et on obtient

$$\|f_n * g - g\|_p^p \le \int_\# f_n(y)\, h(x-y)\,dy = (f_n * h)(0),$$

avec $h(y) := \|f_n - \tau_y f_n\|_p \underset{(y\to 0)}{\longrightarrow} h(0) = 0$, (24)

où $\tau_y f_n : x \mapsto f_n(x-y)$. On a utilisé dans (24) le fait que $\{y \mapsto \tau_y f_n\}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans L^p. □

. On rappelle aussi

<u>Prop. 3 :</u> $\forall f, g \in L^1_\#$, $\widehat{(f * g)}(k) = \hat{f}(k)\,\hat{g}(k)$. (25)

<u>Dém</u>. Posons $e_k(x) := e^{2i\pi kx}$. Alors $\forall g \in L^1_\#$,

$$(g * e_k)(x) = \int_\# g(y)\, e^{ikx} e^{-iky}\,dy = \hat{g}(k)\, e_k(x).$$

Donc $\forall f, g$,

$$((f * g) * e_k)(0) = \widehat{(f*g)}(k)\, \underbrace{e_k(0)}_{=1} = (\text{associativité})$$

$$= (f * (g * e_k))(0) = \int f(y)\,(g * e_k)(0-y)\,dy$$

$$= \int f(y)\,\underbrace{\hat{g}(k)\,e_k(-y)}\,dy = \hat{g}(k)\int f(y)\,e_k(-y)\,dy$$

$$= \hat{g}(k)\,\hat{f}(k),$$ d'où (25). □

C) Noyau de Dirichlet :

On pose d'abord $D_N = \sum_{n=-N}^{+N} e_n$; $e_n(x) := e^{2i\pi nx}$ (26)

Prop. 4 : Le noyau de Dirichlet D_N est pair. Ensuite,

(i) il vérifie : $D_N(x) = \dfrac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x}$; $\int_{\#} D_N(x)\,dx = 1$, (27)

et, $\forall f \in L^1_{\#}$, $S_N f = D_N * f$, (28)

(ii) $\forall x$; $|x| \le 1/2$, $D_N(x) = \dfrac{\sin 2N\pi x}{\pi x} + r_N(x)$, avec

$\sup_{\substack{|x|\le 1/2\\ N\ge 0}} |r_N(x)| < +\infty$, et (29)

(iii) $\|D_N\|_1 \longrightarrow +\infty \quad (N \to +\infty)$ (30)

(iv) Posons $\Delta_N(x) := \int_0^x D_N(y)\,dy$. Alors $\Delta_N(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

De plus, $\forall x \underset{<}{\geq} 0$, $\Delta_N(x) \underset{(N\to+\infty)}{\longrightarrow} \pm\frac{1}{2}$, et $\lim_{N\to+\infty} \Delta_N\left(\frac{1}{2N+1}\right) = \int_0^1 \frac{\sin(\pi y)}{y}\,dy := I$ (31)

Dém. (i) cf TD ; (ii) $D_N(x) = \dfrac{\sin(2\pi N x)\cos \pi x + \cos(2\pi N x)\sin \pi x}{\sin \pi x}$

$= \sin(2\pi N x)\,\mathrm{cotg}\,\pi x + \cos 2\pi N x \quad = \sin(2\pi N x)\cdot\dfrac{1}{\pi x} + \underbrace{\sin 2\pi N x\cdot \rho(x) + \cos 2\pi N x}_{:= r_N(x)}$

avec $\sup_{0 \underset{(=)}{<} |x| \le 1/2} |\rho(x)| < +\infty$

(prolong^t par continuité en 0).

(iii) On a e.g.

$$\|D_N\|_1 = 2\int_0^{1/2} \frac{|\sin(2\pi N x)|}{\pi x}\,dx + O(1) = 2\int_{1/2\pi N}^{1/2} \frac{|\sin(2\pi N x)|}{\pi x}\,dx + O(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_1^{N\pi} \frac{|\sin N y|}{y}\,dy}_{\text{intégrale divergente quand } N\to+\infty)} + O(1)$$

On peut préciser : $\|D_N\|_1 \underset{(N\to+\infty)}{\sim} C \operatorname{Log} N + O(1)$, cf [ZQ]

(iv) On a par ailleurs,

$$\int_0^{1/2} D_N(x)\,dx = \Delta_N\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \sum_{|k|\le N} e^{2i\pi kx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{1\le |k|\le N} 0 = \frac{1}{2}.$$

On renvoie à [MS] pour les autres résultats de (31).

Notons que la suite (D_N) ne vérifie pas les hypothèses du Thm 7. □

. Corollaire 3 : Soit $f \in L^1_\#$. Supposons qu'il $\exists$ $g \in L^1_\#$ tq $\forall x, y$, $f(y) = f(x) + \int_x^y g(t)\,dt$.
On dit alors que f est absolument continue
Alors $\forall x$, $(S_N f)(x) \underset{(N\to+\infty)}{\longrightarrow} f(x)$

Dém. Par translation, on se ramène à $x=0$. Alors

$$S_N f(0) = \int_{-1/2}^{+1/2} f(x)\, D_N(-x)\,dx \text{ , car } D_N \text{ est paire.}$$

En intégrant par parties — ce qu'on peut justifier par densité — on obtient :

$$S_N f(0) = \int_{-1/2}^{+1/2} f(x) \sum_{|k|\le N} e^{2i\pi kx}\,dx.$$

$$= \frac{f(1/2)+f(-1/2)}{2} - \int_{-1/2}^{+1/2} f_1(x)\, \underset{\substack{\downarrow (N\to+\infty)\\ \pm 1/2}}{\Delta_N(x)}\,dx.$$

Grâce au thm de Lebesgue,

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{-1/2}^{+1/2} f_1(x)\,\Delta_N(x)\,dx = \frac{f(1/2)-f(0)}{2} - \frac{f(0)-f(-1/2)}{2}$$

$$\text{Donc } S_N f(0) \underset{(N\to+\infty)}{\longrightarrow} \frac{f(1/2)+f(-1/2)}{2} - \frac{f(1/2)+f(-1/2)}{2} + f(0) = f(0).$$

□

. On admettra aussi, cf [MS] le résultat

Prop. 5 : Soit $g \in L^1_\#$. Supposons que $g \equiv 0$ p.p. sur $]a,b[\subset \mathbb{R}$. Alors — même si $b-a<1$ — les sommes partielles $S_N(g)$ CV uniformément vers 0 sur tout intervalle compact de $]a,b[$.

Thm 8 (de Dirichlet): $***$

Soit $f \in L^1_\#$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que
$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) := f^+ := f(x_0^+) \text{ et } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) := f^- := f(x_0^-) \quad (32)$$
existent, et que
$$\exists\, \delta > 0 \text{ tq } \int_0^\delta \frac{|f(x_0 \pm t) - f^\pm|}{t}\, dt < +\infty. \quad (33)$$
Alors
$$S_N(f)(x_0) \underset{(N \to +\infty)}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f^+ + f^-). \quad (34)$$

Dém. Par translation, on suppose $x_0 = 0$. Alors, d'après la Prop. 4, on a :
$$\begin{aligned} S_N(f)(0) - \frac{1}{2}(f^+ + f^-) &= \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t) f(-t)\, dt - \frac{1}{2}(f^+ + f^-) \\ &= \int_0^{1/2} (f(t) + f(-t) - f^+ - f^-)\, dt \\ &= \int_0^{1/2} h(t) \sin((2N+1)\pi t)\, dt, \quad (35) \end{aligned}$$
où $h(t) = \dfrac{f(t) - f^+ + f(-t) - f^-}{\sin \frac{t}{2}}$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$.

D'après (33), $h \in L^1([0, \frac{1}{2}])$. D'après le Lemme de Riemann-Lebesgue, le dernier membre de (35) $\to 0$ quand $N \to +\infty$, d'où (35). $\square$

Rem. On a seulement utilisé l'$\exists$ de f^+ et f^- vérifiant (33). En pratique, le plus souvent on suppose que f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en x_0, avec des limites à gauche et à droite f_+ et f_- distinctes. $\square$

D) Noyau de Fejer : D'abord, donnons un résultat < 0 -

Thm 9 (Contre-exemple de Fejer)

$\exists f \in C^0_\#$ tq $\sup_{N \geq 1} |S_N(f)(0)| = +\infty$.
En particulier, la suite $(S_N(f))$ diverge en 0.

Dém. cf [ZQ]. Pour un résultat analogue, (mais non constructif) à l'aide du thm de Banach - Steinhaus, cf TD. L'exemple de Fejer est constructif.

. Noyau de Fejer : cf TD, on pose

$K_N = \frac{1}{N}(D_0 + \cdots + D_{N-1})$, (noyau de Fejer) et (36)

$\sigma_N(f) = \frac{1}{N}(S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f))$. (37)

Thm 10 : soit $e_n(x) := e^{2i\pi n x}$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors

(i) $K_N = \sum_{n=-N}^{+N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$; $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin((2N+1)\pi/2)}{\sin \pi x}\right)^2 \geq 0$ (38)

(ii) $\|K_N\|_1 = 1$; $\lim_{N \to +\infty} \int_{\delta < |x| \leq 1/2} K_N(x)\,dx = 0$, $\forall \delta$ tq $0 < \delta < \frac{1}{2}$ (39)

(iii) $\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n$. (40)

Dém. cf TD. $\square$

Thm 11 : thm de CV de Fejer

(i) soit $f \in C^0_\#$. Alors $\forall N$, $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, et
$\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[(N \to +\infty)]{} 0$ (41)

(ii) soit $f \in L^p_\#$. Alors $\forall N$, $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$, et
$\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[(N \to +\infty)]{} 0$ (42)

(iii) Si $f \in C^0_\#$ et f C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f CV normalement vers f.

. Dém. cf [ZQ], cf TD, cf Thm 7. Pour (iii) utiliser le fait que $c_n(f') = in\,c_n(f)$. Noter aussi que d'après (39) et la positivité de K_N, cf (38), les hypothèses du thm 7 sont vérifiées, ce qui n'était pas le cas pour le noyau de Dirichlet.

. Rem. Le thm de Féjer donne une CV en norme, mais pas de CV ponctuelle (dans le cas L^p), pour $\sigma_N(f)$: c'est donc un résultat de CV en moyenne, à la Cesaro. Au contraire, le thm de Dirichlet donne une CV ponctuelle, pour les $S_N(f)$, mais sous des hypothèses + restrictives. Enfin, le thm de Féjer permet de démontrer facilement de nombreux résultats de CV, cf [ZQ] pour des exemples. □

. Rem. On renvoie aux TD, et au cours sur les EDP pour de nombreuses applications des séries de Fourier, tout particulièrement pour résoudre l'équation de la chaleur en diagonalisant l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$ avec des conditions aux limites convenables.