Introduction aux Systèmes dynamiques

Ce cours a d'abord été enseigné en L3 MASS à Nice.
On y ajoute ici qlcq compléments + mathématiques.

Ch. 1. Généralités. Le Thm de Cauchy-Lipschitz.

§1. Motivations. Exemples de questions

. Etudier la dynamique d'un phénomène, par opposition à l'étude des états stationnaires (états "d'équilibre", stable, instable ?...). Donc, étudier les phénomènes transitoires, leur comportement quand le temps $t \to \pm\infty$.

. Exemples : est-ce que la solution $x(t) \to$ un état d'équilibre x^* quand $t \to +\infty$? est-ce qu'elle oscille autour de x^* ? S'il y a plusieurs états d'équilibre, quels sont leurs bassins d'attraction (ou de répulsion) ?...

. Etude locale près d'un point d'équilibre : étude du système linéarisé, stabilité (non) linéaire, étude locale des trajectoires

. Dépendance continue de la solution / aux données initiales (continuité du flot) ? / à un paramètre (bifurcations) ?

. Systèmes dissipatifs, flots de gradients, fonction de Lyapunov... Au contraire, systèmes conservatifs, hamiltoniens, $\exists$ de solutions périodiques ?...

. Systèmes dynamiques discrets... Liens avec un système continu. ~~Ex~~ approximation numérique d'un syst. dynamique.

. Applications à des exemples concrets en mécanique, en biologie, en économie...

. On étudiera, au moins sur qlcq exemples, les points soulignés

* * *

§2. Le pb de Cauchy pour un système différentiel.

On se donne :

A) Un système d'éq. diff. ordinaires (EDO) d'ordre 1 : [(cf p3)]

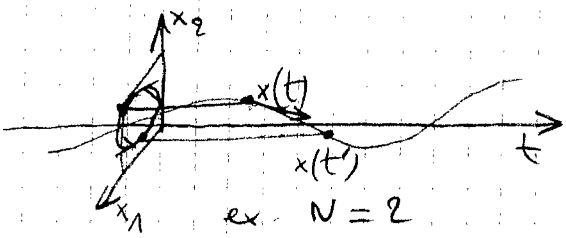
$$\dot{x}(t) := \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), \quad t := \text{temps}, \qquad (1)$$

où la solution : $\{x : t \mapsto x(t)\}$ est une fonction inconnue, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$

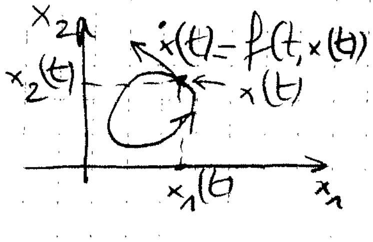
$$x(t) := (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{domaine ouvert}}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^N.$$

[Exemple : $N = 1$, $\Omega =]a,b[$ intervalle ouvert $\subseteq \mathbb{R}$. C'est le cas scalaire.]

- Dans le système d'EDO (1), la fonction $f : (t,x) := (t, x_1, \dots, x_N) \mapsto f(t,x) := (f_1(t,x), \dots, f_N(t,x))$ est donnée. On la suppose aussi régulière que nécessaire / à x ($\forall t$ fixé), et au moins continue / à (t,x), cf plus loin.
- On dit que la fonction $x(\cdot)$ est solution du système (1) sur un intervalle de temps $I \subseteq \mathbb{R}$ si $x(\cdot)$ est au moins C^1 et vérifie : $\forall t \in I$, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ (1)
- Interprétation géométrique : Soit $x(\cdot)$ une solution de (1) sur $I \subset \mathbb{R}$. Le point $(t, x(t))$ décrit une courbe dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N$, appelée courbe intégrale du système (1). Il y en a en général une infinité.



ex. $N = 2$



La projection de chaque courbe intégrale sur l'espace $\mathbb{R}_x^N$ peut être vue comme la trajectoire d'un point matériel $M(t) := (x_1(t), \dots, x_N(t))$, de vecteur vitesse $\dot{M}(t) = \dot{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ tangent à la trajectoire au point $M(t)$, et l'application $\{ \underset{\underset{I}{\cap}}{t} \mapsto x(t) := (x_1(t), -, x_N(t)) \}$ est une représentation paramétrique de la trajectoire. Exemple: pour $N = 2$, considérons:

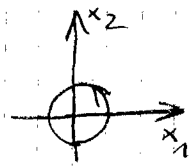
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \text{ avec } \begin{cases} f_1(t, x_1, x_2) = -x_2 \\ f_2(t, x_1, x_2) = +x_1 \end{cases} \qquad (2)$$

et

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t)), \text{ avec } \begin{cases} g_1(t, x_1, x_2) = -2x_2 \\ g_2(t, x_1, x_2) = -2x_1 \end{cases} \qquad (2')$$

ces deux systèmes d'EDO admettent respectivement pour solutions $x(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $\forall r \geq 0$

et $y(t) = (r'\cos 2t, r'\sin 2t)$, $\forall r' \geq 0$.



Pour $r = r'$, les trajectoires sont les $\overline{m}$, mais le mobile $N(t) = (y_1(t), y_2(t))$" tourne 2 fois plus vite que $M(t) = (x_1(t), x_2(t))$.

Rem. • Dans un système comme (2) ou (2'), le temps t n'intervient pas explicitement. Il n'intervient que via la solution (inconnue) $x(t)$. On dit que (2) ou (2') est un système autonome: la dynamique ne dépend pas de l'instant de départ: invariance par translation en temps.

• On dit qu'un système diff. comme (2) est du premier ordre, car il ne contient que des dérivées d'ordre ≤ 1. Un système diff. d'ordre $m \geq 1$ peut se ramener à un système diff. du 1er ordre dans $\mathbb{R}^{m \cdot N}$. Par exemple, pour $N = 1$, l'éq. diff. $\ddot{y}(t) := \frac{d^2 y}{dt^2}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t))$, (3)

où $y(t) \in \mathbb{R}^N$, avec $N = 1$, se ramène à l'étude du système

$$\dot{Y}(t) = F(t, Y(t)), \tag{4}$$

avec $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, $F(t,Y) := \begin{cases} F_1(t, Y_1, Y_2) := f(t, Y_1, Y_2), \\ F_2(t, Y_1, Y_2) := Y_2 \end{cases}$, (5)

cf TD.

• En général, on a vu avec (2) ou (2') qu'un système diff. d'ordre $m \geq 1$ admet une infinité de solutions. Pour avoir une solution unique, il faut ajouter m "conditions initiales". $\square$

B). On impose donc, pour un système du 1er ordre :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^N, \; t \in I \subset \mathbb{R} \quad (1)$$

une "condition initiale" à un instant $t_0 \in I$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{6}$$

Dans les bons cas, le système $\begin{Bmatrix} (1) \\ (6) \end{Bmatrix}$ admet une unique solution, i.e. $\exists$ une unique solution de (1) : $\{t \mapsto x(t)\}$, telle que $x(t_0) = x_0$ (6).

Autrement dit, $\exists$ une unique solution de (1) passant au point x_0 à l'instant t_0.

. Pour un système (ou une éq. si $N=1$) d'ordre m, on remplace (6) par la donnée de la valeur de la solution et de ses $(m-1)$ premières dérivées en $t = t_0$

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^N \\ \dot{x}(t_0) = x_1 \in \mathbb{R}^N \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (m \text{ conditions dans } \mathbb{R}^N). \quad (7)$$

Exemple : Pour l'éq. scalaire du second ordre (3), on impose $(y(t_0), \dot{y}(t_0)) = Y(t_0) := Y_0 := (y_0, y_1)$, (8)

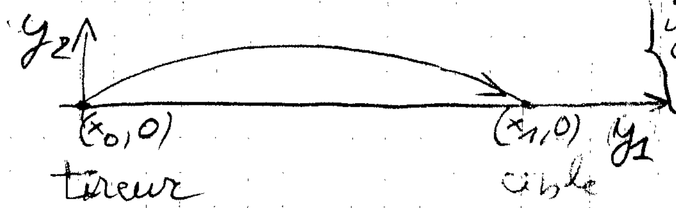
i.e. la position initiale et la vitesse initiale.

Rappel : $\ddot{y}(t)$ est l'accélération. $\square$

Déf. Pour un système du premier ordre (1), on appelle **Pb de Cauchy** (ou : Pb diff. à <u>conditions initiales</u>) le pb (1)(6)

Rem. La condition "initiale" peut être en fait "finale" (si $I =]a, t_0]$) ! le point important est que dans (6) toutes les relations entre vecteurs de $\mathbb{R}^N$ sont prises au <u>MÊME INSTANT</u> t_0.

- Si ce n'est pas le cas, on parle alors de <u>Pb aux limites</u> : <u>nous ne traiterons pas ce genre de pb</u>. <u>Exemple</u> : <u>pb du tir</u>



$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = f(y(t), \dot{y}(t)) \\ y(t_0) = (x_0, 0), \\ y(t_1) = (x_1, 0), \end{cases}$$

(x_0, x_1) donnés
t_0 connu
t_1 inconnu

§3- ∃ et unicité de la solution. Thm de Cauchy-Lipschitz

Thm 1 : Cauchy-Lipschitz (***) <u>Version globale</u>

(i) On considère le pb de Cauchy

(EDO) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, (1)

(CI) $x(t_0) = x_0$, t_0 donné qlq $\in \mathbb{R}$, x_0 donné qlq $\in \mathbb{R}^N$. (6)

(ii) On suppose que $f : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to f(t,x) \in \mathbb{R}^N$ est <u>continue</u> (***)

et Lipschitzienne / à x, unif^t / à t (***) :

$$\exists L > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\| \quad (9)$$

où $\|\cdot\|$ est une <u>norme</u> (***) qlq sur $\mathbb{R}^N$,

[e.g. $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2} := \|x\|_2$, ou $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i| = \|x\|_\infty$, ou $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$ ou ...]

Thm 1 : Cauchy-Lipschitz (version globale, suite) 6

Alors $\exists$ une unique solution de (1) (6), de classe C^1, définie globalement sur $\mathbb{R}$. De plus, deux solutions x et y de (1) respectivement associées à (6) et

$$y(t_0+h) = y_0 \qquad (6')$$

vérifient si $h=0$: (***)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \|y(t)-x(t)\| \leq e^{L|t-t_0|}\|y_0-x_0\|, \qquad (10)$$

et si $h \neq 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|y(t)-x(t)\| \leq e^{L(|t-t_0|+|h|)}\|y_0-x_0\| + \varepsilon(h,y_0,t), \quad (11)$$

où $\varepsilon(h,y_0,t) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$: continuité du flot, cf ci-dessous

• Dém. : Point fixe d'une application contractante

. On construit une solution (unique) sur un petit intervalle $[t_0, t_0+\Delta t]$, avec $\boxed{\Delta t . L := C < 1}$

. On recommence sur $[t_1, t_1+\Delta t] := [t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t]$, intervalle de m̄ longueur, etc...

• On construit ainsi une solution unique sur $[t_0, +\infty[$ (et de m̄ sur $]-\infty, t_0]$)

• Sur $[t_0, t_1]$, on pose $|||x(\cdot)||| := \sup_{t\in[t_0,t_1]} \underbrace{\|x(t)\|}_{\text{norme sur } \mathbb{R}^N}$

Alors x est solution de (1) (6) sur $[t_0,t_1]$ ssi $\forall t \in I$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds := (\mathcal{F}(x))(t) \qquad (12)$$

On pose alors $x^0 := x_0$ et $x^{k+1}(t) := (\mathcal{F}(x^k))(t)$ (0, k, k+1 sont des indices supérieurs).

Alors

$$|||x^{k+1}(\cdot)-x^k(\cdot)||| = \sup_{t\in[t_0,t_1]} \|x^{k+1}(t)-x^k(t)\| = \text{d'après (12)}$$

$$= \sup_{t\in[t_0,t_1]} \left\| \int_{t_0}^{t} \left(f(s,x^k(s)) - f(s,x^{k-1}(s))\right) ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L \, \|x^k(s) - x^{k-1}(s)\| \, ds = \underline{L|t-t_0|} \cdot |||x^k(\cdot) - x^{k-1}(\cdot)||| , \quad \underline{\underline{(13)}}$$

d'après (9)

$$\leq \boxed{L\Delta t := C < 1} , \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

. Finalement, en ayant choisi $\Delta t > 0$ assez petit, on a :

$$\forall k, \ |||x^{k+1}(\cdot) - x^k(\cdot)||| \leq C \, |||x^k(\cdot) - x^{k-1}(\cdot)||| \leq \dots$$

$$\leq C^k \, |||x^1 - x^0||| \quad , \text{ avec } 0 < C < 1$$

- Donc la série de fonctions $\{t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} (x^{k+1}(t) - x^k(t)) \in \mathbb{R}^N\}$ converge pour la norme $|||\cdot|||$ vers une fonction continue $\{t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^N\}$ sur $[t_0, t_1]$. Par continuité de $f(\cdot,\cdot)$, $x(\cdot)$ vérifie (12), donc est solution de (1)(6) sur $[t_0, t_1]$.

. En faisant le m̄ calcul que dans (13) pour deux solutions éventuelles x et y de (1), (6), on obtient $|||x-y||| \leq C \, |||x-y|||$, avec $0 \leq C < 1$. Donc nécessairement $|||x-y||| = 0 \Rightarrow x = y$. <u>unicité</u>

- On recommence sur $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + \Delta t]$, <u>intervalle de m̄ longueur</u>, car les hypothèses sont vérifiées <u>GLOBALEMENT</u>, cf ci-dessous.

(***)

- Enfin, (10) est conséquence du <u>Lemme de Gronwall</u>, cf ci-dessous, et (11) <u>est admis</u>, cf ci-dessous. □

<u>Lemme de Gronwall</u> (***) : <u>Version à coeffts constants</u>

Soient $a, b > 0$ et $\{t \mapsto y(t) \geq 0\}$ une fonction tq $\forall t, \ \dot{y}(t) \leq a\, y(t) + b \quad (14)$. Alors $\forall t \geq t_0$,

$$y(t) \leq \frac{1}{a}(a y(t) + b) \leq (a y(t_0) + b) e^{a(t-t_0)}$$

<u>Dém. et applications</u>, cf TD. [Diviser les 2 membres de (14) par $ay(t)+b > 0$]

• Déf. Flot associé à (1). Supposons qu'on est dans les hypothèses du thm de Cauchy-Lipschitz "global". Alors on appelle indifféremment flot associé à (1) l'application

$$\phi : (t, t_0, x_0) \longmapsto x(t),$$

où $x(\cdot)$ est l'unique solution du pb de Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad (1)$$
$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad (6)$$

ou l'application

$$\phi_t : (t_0, x_0) \mapsto x(t) \quad , \quad t \text{ fixé qlcq.}$$

L'inégalité (11) entraîne que $\forall t \in \mathbb{R}$ ($|t| < +\infty$), l'application ϕ_t est continue : si deux jeux de données initiales (t_0, x_0) et $(t_0 + h, y_0)$ sont proches, alors à tout instant t fini les solutions associées $x(t)$ et $y(t)$ sont "proches"

⚠ Ceci est FAUX si les hypothèses du thm de CL (Cauchy-Lipschitz) ne sont pas globales.

• thm 2 : CL (version locale) ***

(i) Comme au thm 1, on suppose que $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ est continue de $I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, I intervalle ouvert, Ω domaine ouvert $\subset \mathbb{R}^N$, et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$.

(ii) On suppose que pour toute boule $B(x,r)$ bornée $\subset \Omega$ et pour tout intervalle J borné $\subset I$, on a encore

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L \|x - y\|,$$

mais L dépend de J et de B

thm 2 CL (local) suite

(iii) Alors $\exists$ une unique solution $x(\cdot)$ du pb de Cauchy (1), (6), définie localement, i.e. définie sur un voisinage de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$.

(iv) Cette solution admet un unique prolongement maximal sur $I \times \Omega$. En particulier, soit cette solution "explose en temps $t^* < +\infty$":
$\|x(t)\| \underset{(t\to t^*)}{\longrightarrow} +\infty$, soit, pour une suite (t_n), $(t_n, x(t_n)) \to (t^*, x^*)$
et (t^*, x^*) n'est pas dans le domaine de définition $\mathcal{O}$ de f. Il n'y a pas d'autre possibilité : c'est le "thm des bouts."

(v) Si cette solution maximale est définie sur $[t_0, t^*[$ ou sur $]t^*, t_0]$, l'inégalité (11) (continuité du flot) est encore valable $\forall t \in [t_0, t^*[$ (ou $\forall t \in]t^*, t_0]$).

⚠ Le point important est que dans la méthode de point fixe du thm 1, on construit une solution unique sur $[t_0, t_1]$, puis sur $[t_1, t_2]$ qui est éventuellement de longueur $< t_1 - t_0$, etc... La série $\sum_{i=0}^{+\infty}(t_{i+1} - t_i)$ risque d'être CV, et de somme $t^* < +\infty$. $\square$

On renvoie aux TD pour des illustrations des différents cas.

• Compléments : • On suppose toujours f localement Lipschitzienne /à x, et continue /à (t,x). Soit $x(\cdot)$ solution unique de (1) (6), définie sur $[t_0, t_1]$. On peut la prolonger sur $[t_1, t_2]$ de manière unique (avec $0 < t_2 - t_1$ assez petit), ssi $\boxed{x(t) \underset{(t\to t_1^-)}{\longrightarrow} x_1}$, avec $x_1 \in \Omega$.

• Un prolongement $\tilde{x}$ de $x(\cdot)$ solution du Pb de Cauchy (1)(6) sur $[t_0, t_2]$ est maximal si on ne peut pas le prolonger pour $t > t_2$, i.e. si $t_2 = t^* := \sup\{t' \geq t_0,\ \exists\, x(\cdot)$ solution de (1)(6), définie sur $[t_0, t'[$, tq $\forall t \in [t_0, t'[$, $(t, x(t)) \in \mathcal{O} = I \times \Omega\}$. On retrouve (iv) en raisonnant par l'absurde... cf Cours oral $\square$