

Ch 4. Indications sur les systèmes dynamiques discrets.

§ 1 - Introduction:

Ici, le temps est discret: il est noté n ou $t \in \mathbb{N}$.
On appelle équation aux différences (ED) ou équation de récurrence une relation du type

$x_{n+1} = f(n, x_n)$ ou $x_{t+1} = f(t, x_t)$ (*)
on parle alors d'une ED du premier ordre,
autonome si $f(t, x_t) \equiv f(x_t)$, linéaire
si $f(t, x_t) = a(t)x_t + b(t)$, à coefficients
constants si $a(t) \equiv a$ est constant, sans second
membre (ou homogène) si $b(t) \equiv 0$. De
même, une ED de la forme

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_2 x_t = f(t) \quad (**)$$

(connue $\forall t$)

est une ED d'ordre 2, linéaire, à coefficients
constants, inhomogène si $f(t) \neq 0$. On peut
aussi introduire la notion de SD du premier
ordre (système d'équations aux différences, ou système
dynamique discret):

$$X_{t+1} = F(X_t), \quad F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ exemple } (***)$$

$$X_{t+1} = AX_t + b, \quad A \text{ matrice (constante) } \dots$$

Le pb à condition initiale consiste à ajouter à l'ED
une (ou des) condition(s) initiale(s), e.g. x_0 donné pour
(*), (x_0, x_1) données pour (**). Ce pb a une solution
unique, donnée par récurrence - La question est:
quel est le comportement de x_t quand $t \rightarrow +\infty$?

3 - E.D. non linéaires du premier ordre

Notation: on note le temps discret $n \in \mathbb{N}$ ou $t \in \mathbb{N}$

On considère ici uniquement le cas d'une E.D. autonome!!

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t), \\ x_0 = x(0) \text{ donné:} \end{cases} \quad \text{condition initiale (C.I.)} \quad (1)$$

le temps discret t n'intervient pas explicitement dans (1)

• Evidemment, la suite $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est déterminée de manière unique par (1) et (C.I.). Rem (A) cette fois, l'ensemble $\mathbb{E}$ des suites (x_t) solutions n'est pas en général un e.v. !!

• Exemple 1: le modèle de croissance de Solow (discret)

$$k_t = \frac{1}{1+n} [\alpha f(k_t) + (1-\delta)k_t] := g(k_t), \quad \alpha \leq 1, \quad 0 < \delta < 1, \quad n > 0$$

f fonction $\nearrow$ et concave tq $f(0)=0, f'(k) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} +\infty,$
et $f(k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

k : capital par tête,
 $f(k)$: production de capital " "
 α : propension marginale à économiser
 δ : taux de dépréciation du capital
 n : taux de $\nearrow$ de la population

• Etats d'équilibre: ils correspondent à $k_t \equiv k_e = c^{\text{te}} \Leftrightarrow g(k_e) = k_e$

On étudie la fonction: $g(k) := \frac{1}{1+n} (\alpha f(k) + (1-\delta)k)$:

$$g'(k) = \frac{1}{1+n} (\alpha f'(k) + 1 - \delta) > 0,$$

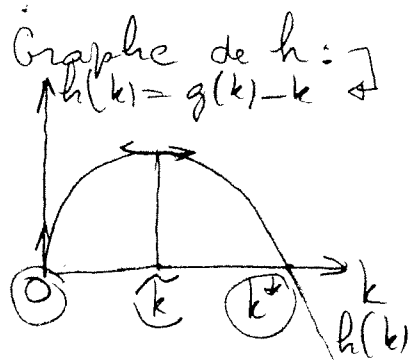
$$g''(k) = \frac{1}{1+n} \alpha f''(k) < 0. \text{ Ensuite, } g'(k) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{pour } k \rightarrow 0_+ \\ 1-\delta & \text{" } k \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Donc posons $h(k) := g(k) - k$. On a:

k	0	k^*	$+\infty$
$h''(k)$	-	-	-
$h'(k)$	$\nearrow +\infty$	0	-
$h(k)$	0_+	≥ 0	-

$$h'(k) = \begin{cases} g'(k) - 1 \rightarrow +\infty & (k \rightarrow 0_+) \\ -\delta < 0 & (k \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Donc } g(k) = k \text{ si } \begin{cases} k=0 \text{ ou} \\ k=k^* \end{cases}$$



Thm 1 (suite):

Alors

(a) $\exists$ un unique point fixe x de f dans I :

$$\exists x \in I, \text{ unique, tq } x = f(x)$$

(b) $\forall x(0) \in I$, la suite (x_t) solution de

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

$$x_0 = x(0)$$

reste dans l'intervalle $I \forall t \in \mathbb{N}$, et CV vers x^* quand $t \rightarrow +\infty$: x^* est fortement stable, ou asymptotiquement stable.

Dém. Par récurrence, $\forall x_0 \in I, \forall t \in \mathbb{N}, x_{t+1} = f(x_t) \in f(I) \subset I$

$$\text{Ensuite, } \forall t \in \mathbb{N}, |x_{t+1} - x_t| = |f(x_t) - f(x_{t-1})| = |f'(\xi_t)(x_t - x_{t-1})|,$$

avec ξ_t entre x_{t-1} et x_t , donc $\xi_t \in I$. Donc

$$|f'(\xi_t)| \leq c < 1. \text{ Donc}$$

$$\forall t \in \mathbb{N}, |x_{t+1} - x_t| \leq c |x_t - x_{t-1}| \leq \dots \leq (c)^t |x_1 - x_0|$$

Donc la série $\sum_{t=0}^{+\infty} (x_{t+1} - x_t)$ CV comme la série géométrique c^t , avec $|c| < 1$. Sa limite est

$$x^* - x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1} - x_t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_0),$$

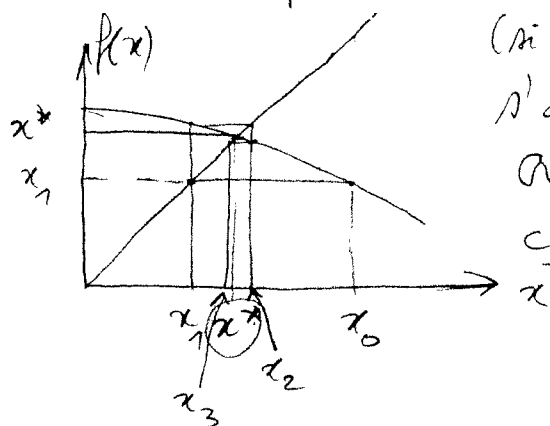
donc $x_n \rightarrow x^*$ ($n \rightarrow +\infty$), et de même $x_{n+1} = f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x^*)$,
 $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x^*$

donc x^* est un point fixe, et c'est le seul car s'il en existait un autre: x_* , on aurait $|f(x^*) - f(x_*)| = |x^* - x_*| \leq c |x^* - x_*|$,

$$\text{donc } x^* - x_* = 0 : x^* = x_*. \quad \square \quad [0 < c < 1]$$

Rem. Dans l'exemple 1, le Thm s'applique avec $I = [\tilde{k}, +\infty[$. On vérifie cependant directement que si on part de $k_0 \in]0, \tilde{k}]$, au bout d'un nombre fini p de fois, on aura: $\forall n \geq p, k_n \geq \tilde{k}. \quad \square$

Rem. Dans le cas où f vérifie les hypothèses du thm, avec $f \searrow$ sur I , on a la figure ci-contre



(si $x_0 > x^*$): dans ce cas, le thm 1 s'applique avec $I=[x_1, x_0]$. On a alors une figure du type cobweb (toile d'araignée). $\square$

Exemple 2: L'équation logistique (indications)

$$x_{t+1} = f(x_t) := \alpha x(1-x), \quad \alpha > 0, \text{ avec } x_0 \in [0, 1]$$

On étudie la fonction $f: x \mapsto \alpha x(1-x)$

x	0	1/2	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\rightarrow \alpha/4$	$\rightarrow 0$

Alors l'intervalle

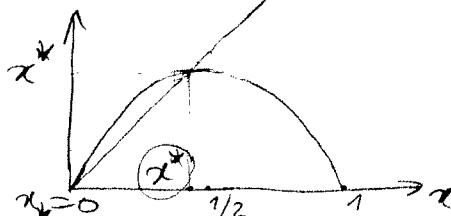
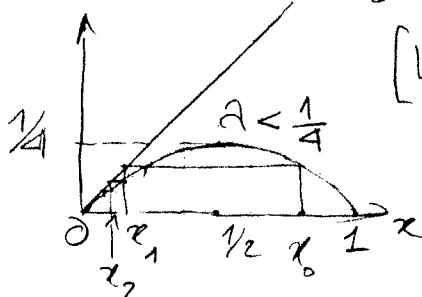
$I := [0, 1]$ est invariant par f si $0 \leq \alpha \leq 4$.

Dans ce cas $\sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = |f'(0)| = |f'(1)| = \alpha$

a) Premier cas: $0 < \alpha < 1$, alors $f(I) \subset I$ et $\sup_{x \in I} |f'(x)| = \alpha < 1$

donc f admet un unique point fixe $x^* \in [0, 1]: x^* = 0$ et $\forall x_0 \in [0, 1]$, la suite (x_t) cv en $\searrow$ vers $x^* = 0$: $x^* = 0$ est un équilibre stable

[La situation est la même pour $\alpha = 1$].



cv monotone

b) Deuxième cas: $1 < \alpha < 3$. Alors f admet deux points fixes

sur $[0, 1]: x_* = 0$ et x^* solution de $x^* = \alpha x^*(1-x^*)$

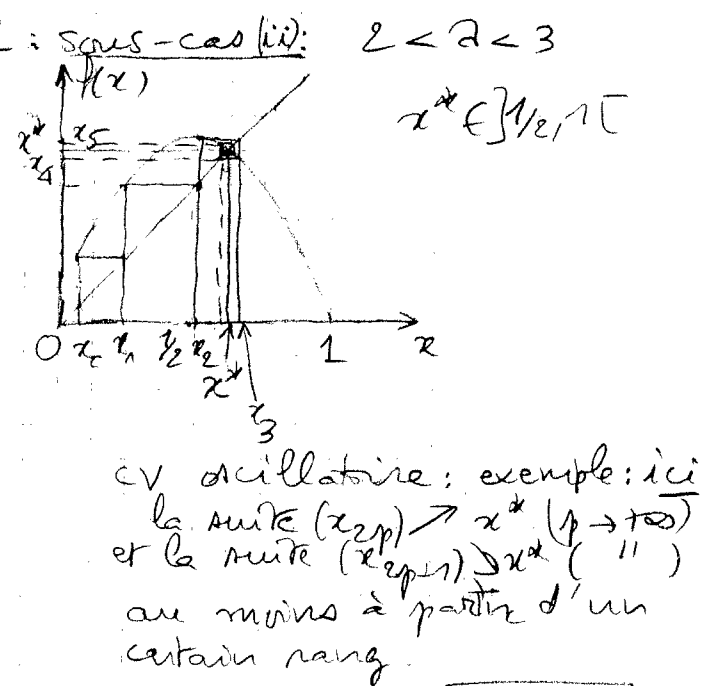
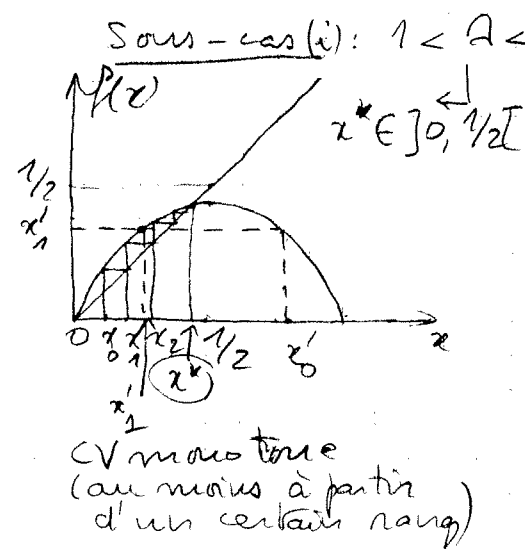
$$\Leftrightarrow x^*(1 - \alpha(1-x^*)) = 0, x^* \neq 0 \Leftrightarrow x^* = \frac{\alpha-1}{\alpha} \in]0, 1[$$

D'abord, 0 devient instable. Étudions la stabilité de $x^* > 0$

Etudions f' dans ce cas: $\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(0)| = |f'(1)|$
 $= 2 \in]1, 3[$

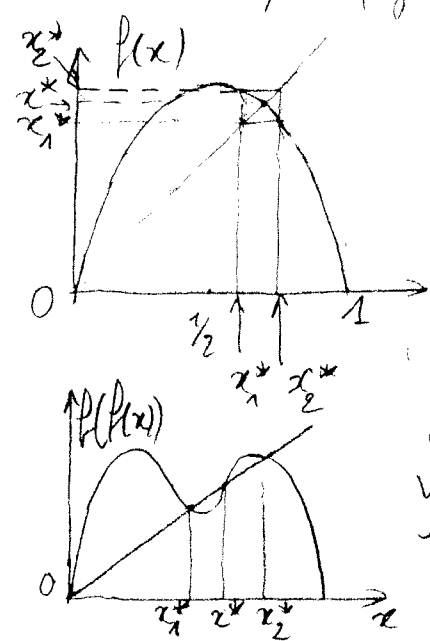
donc on ne peut pas appliquer le thm 1 à $I = [0,1]$. Par contre, calculons
 $|f'(x_0)| = |2(1-2x_0)| = |2(1 - \frac{2(2-1)}{2})| = \frac{2}{2} |(2-2)| = |2-2| < 1$.
 Donc on peut appliquer le thm sur un voisinage de x^* .

Illustration: cas: $1 < 2 < 3$



c) Cas 3: exemple de dynamique complexe $2 \notin [3, 4]$

A partir d'une valeur critique $2_1 \approx 3.2$, on a (au moins) la figure suivante (cf "cascade de Feigenbaum"):



$f(x_1^*) = x_2^*$ et $f(x_2^*) = x_1^*$
 [noter que $|f'(x_i^*)| > 1$].

Alors la suite $(x_{2p}) \rightarrow x_1^*$ et $x_{2p+1} \rightarrow x_2^*$ (ou l'inverse)...

Le graphe de $f \circ f: x \mapsto f(f(x))$ est alors:
 $f \circ f$ a 4 points fixes dans $[0,1]$, dont deux stables (localement): x_1^* et x_2^* . Pour une valeur critique $2_2 > 2_1$, $(f \circ f \circ f \circ f)$ a 8 points fixes, dont 4 localement stables, etc....

32. Idées sur les ED (équations aux différences) linéaires du second ordre :

On considère l'ED. du second ordre, linéaire :

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_2 x_t = f(t), \forall t \in \mathbb{N}. \quad (2')$$

Clairement, l'ensemble des suites $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ solutions de $(2')$ est un sous-espace vectoriel de l'e.v. des suites numériques $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$, et cet ensemble $\underline{E}$ est de dimension 2, car il suffit de deux conditions initiales (C.I.)

$$(x_0, x_1) \text{ donnés} \quad (3)$$

pour déterminer toute suite (x_t) solution de $(2')$ — ou de (2) — et de (3), par récurrence.

On cherche (encore) des suites $(y_t)_{t \in \mathbb{N}} = r^t$ solutions de $(2')$. On obtient l'équation caractéristique en représentant $y_t = r^t$ dans $(2')$:

$$r^t (r^2 + a_1 r + a_2) = 0, \text{ d'où } \neq 0 \quad \boxed{r^2 + a_1 r + a_2 = 0} \quad (EC)$$

Si (EC) a deux racines $\neq r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on obtient encore la SG (solution générale) de l'eq. homogène $(2')$:

$$\boxed{y_t = \alpha (r_1)^t + \beta (r_2)^t, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})}$$

avec l'autre écriture : $y_t = |r_1|^t (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$

si $r_1 = r_2$, et $\omega = \text{argument de } (r_1, r_2)$

$$\Leftrightarrow y_t = C |r_1|^t \cos(\omega t - \theta_0),$$

$\boxed{t \in \mathbb{N}, \text{ racine double}}$

et on obtient $y_t = |r|^t (\alpha t + \beta)$ si $r_1 = r_2 = r$.

la stabilité asymptotique quand $t \rightarrow +\infty$ équivalant à $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$