# Ch 5 — Indications sur l'équation de transport :

- **Déf** : on appelle *éq. de transport* (ou *d'advection*) l'EDP :

(1) $\partial_t u + \sum_{j=1}^{N} a_j(x,t)\partial_j u(x,t) + \cancel{a_0(x,t)u(x,t)} = f(x,t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times ]0,+\infty[$

où les coefficients $a_0$ et $a_j$, $1 \leq j \leq N$ sont connus, supposés réguliers, et $f$ est connue. On ajoute la C.I. (condition initiale) :

(2) $u(x,0) = u_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $u_0$ connue.

- On se limitera au cas où $a_0 \equiv 0$.

- **Déf** : (i) on appelle *courbes caractéristiques* de l'EDP (1) les courbes intégrales de l'EDO

(3) $\frac{dX}{dt}(t) = a(X(t),t) := (a_1(X,t), \ldots, a_N(X,t))$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}$)

(ii) on suppose pour simplifier que $a(\cdot,\cdot)$ vérifie les hypothèses du thm de Cauchy-Lipschitz global sur $\mathbb{R}_+$. Alors, $\forall (y,s) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty[$, $\exists$ unique $X(\cdot)$ solution de (3) et de la C.I.

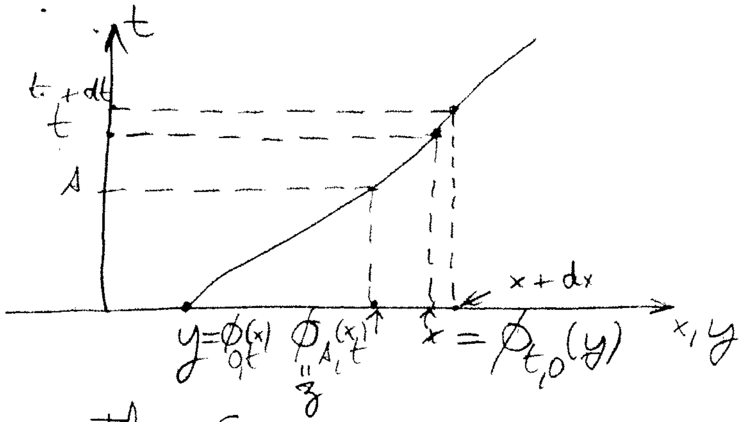
(4) $X(s) = y$,

définie *globalement* sur $\mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}$).

L'application $\phi_{t,s} : y \longmapsto x = \phi_{t,s}(y) := X(t) := X(y,s;t)$, appelée le *flot* de l'EDO, est alors une *bijection* de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}^N$ (*exercice*), $\forall s,t$ fixés.

- Dans le cas *autonome*, où $a(x,t) \equiv a(x)$, on a :

$\phi_{t,s}(y) \equiv \phi_{t-s,0}(y)$. On note $\phi_t(y) := \phi_{t,0}(y)$.




<u>Thm 6 :</u>

(i) Le long de toute courbe caractéristique (3), $\forall u \in C^1(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty[)$, on a

$$\frac{d}{dt} u(X(t),t) = (\partial_t u + a \cdot \nabla u)(X(t),t), \qquad (5)$$

(ii) donc $u$ est solution de l'EDP (1) ssi

$$\frac{d}{dt} u(X(t),t) = f(X(t),t), \quad \forall x = X(t), \qquad (6)$$

(on a supposé $a_0 \equiv 0$), et $u$ est solution du <u>Pb de Cauchy (1)(2)</u> (dans le cas $f \equiv 0$) ssi on impose

$$\begin{cases} \forall x,t,\ u(X(t),t) := u(X(0),0) = u_0(X(0)), \\ \text{où } X(0) = y \text{ est lié à } x \text{ par} \end{cases} \qquad (7)$$

$$x = \phi_{t,0}(y) \iff y = (\phi_{t,0})^{-1}(x) = \phi_{0,t}(x) \qquad (8)$$

(iii) Si $f \not\equiv 0$, l'unique solution du Pb de Cauchy (1)(2) est donnée par la <u>formule de Duhamel</u>:

$$u(x,t) = u_0((\phi_{t,0})^{-1}(x)) + \int_0^t f(\phi_{t,s}^{-1}(x) \quad ds \qquad (9)$$

<u>Dém.</u> (i) est simplement la formule de dérivation d'une fonction composée : $t \mapsto (X(t),t) := (x,t) \mapsto u(x,t)$.

(ii) s'en déduit trivialement si $f \equiv 0$. Noter que (7) définit la solution $u$ <u>de manière unique</u>, car le flot est bijectif $\forall t$ (et $\forall s$, donc en particulier pour $s=0$).

(iii) Montrons que (9) définit une solution de (1)(2).

En retranchant deux solutions de (1)(2), la différence vérifie (1)(2), avec $f \equiv 0$ et $u_0 \equiv 0$, d'où l'unicité $\forall f$.

Pour simplifier les calculs, on se limite au cas $N=1$. Faites le cas N qlcq en exercice. On a :

$$u(X(t),t) = u(x,t) = u_0(\underbrace{\phi_{0,t}(x)}_{y}) + \int_0^t f(\phi_{s,t}(x),s)\,ds$$

Donc

$$\partial_t u(x,t) = \frac{du_0}{dy}(y)\,\frac{\partial \phi_{0,t}}{\partial t}(x) + f(\underbrace{\phi_{t,t}(x)}_{\overset{\shortparallel}{x}},t) + \int_0^t \partial_1 f(\phi_{s,t}(x),s)\frac{\partial\phi_{s,t}}{\partial t}(x)\,ds \qquad (10)$$

variable muette : $\partial(1^{\text{ère}}$ variable$)$

et

$$\partial_x u(x,t) = \frac{du_0}{dy}(y)\cdot\frac{\partial\phi_{0,t}}{\partial x}(x) + \int_0^t \partial_1 f(\phi_{s,t}(x),s)\,\frac{\partial\phi_{s,t}}{\partial x}(x)\,ds \qquad (11)$$

On doit donc multiplier (11) par $a_1(x,t) \equiv a(x,t)$ (ici, $N=1$) et ajouter (10). D'où

$$(\partial_t u + a(x,t)\partial_x u)(x,t) = \frac{du_0}{dy}(\underbrace{\phi_{0,t}(x)}_{\overset{\shortparallel}{y}})\,\underline{\left(\frac{\partial\phi_{0,t}}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial\phi_{0,t}}{\partial x}\right)}(x,t)$$

$$+ f(x,t) + \int_0^t \partial_1 f(\phi_{s,t}(x),s)\,\underline{\left(\frac{\partial\phi_{s,t}}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial\phi_{s,t}}{\partial x}\right)}(x,t)\,ds \qquad (12)$$

Or, cf Figure, $\forall s$ fixé, $\forall t$, on a, en posant $z := \phi_{s,t}(x)$ :

$\phi_{s,t}(x) = \phi_{s,t}(\phi_{t,s}(z)) = \phi_{s,t}(X(t)) = z$ est indépendant de $t$, car $X$ vérifie (3). Donc

$$\frac{d}{dt}\phi_{s,t}(X(t)) = \frac{\partial\phi_{s,t}}{\partial t}(\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{X(t)}) + \frac{\partial\phi_{s,t}}{\partial x}(\underset{\overset{\shortparallel}{x}}{X(t)})\cdot\underbrace{\frac{dX}{dt}(t)}_{=a(x,t)} = 0.$$

Donc les termes soulignés dans (12) s'annulent, d'où le résultat.

. Rem. En mécanique des fluides, $a(x,t)$ : vitesse, $x$ désigne les coordonnées Eulériennes (point de vue "géographique") et $y$ les coordonnées Lagrangiennes (point de vue "historique"). Dans le changement de coordonnées : $(x,t) \mapsto (y,s) := (\phi_{0,t}(x), s)$, avec cette fois $\underline{s := t}$ (ce n'est pas le même "s" que plus haut. Rappel : il est prudent de ne pas donner au temps le même nom ...), toute fonction $u(x,t) := \tilde{u}(y,s) := \tilde{u}(\phi_{0,t}(x), t)$ vérifie

$$\partial_s \tilde{u}(y,s) = \partial_t u(x,t) + \partial_x u(x,t) \cdot \underbrace{a(x,t)}_{\text{"}\frac{dX}{dt}\text{"}(t)}$$

et $$\partial_y \tilde{u}(y,s) = \partial_x u(x,t) \cdot \frac{\partial \phi_{s,t}}{\partial y}(y).$$

Dans ce système de coordonnées, le Pb de Cauchy (1)(2) devient (toujours pour $a_0(x,t) \equiv 0$) :

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{u}(y,s) = \tilde{f}(y,s) = f(\underbrace{\phi_{s,0}(y)}_{x}, \underbrace{s}_{t}), & (1') \\ \tilde{u}(y,0) = u_0(y). & (2') \end{cases}$$

En coordonnées lagrangiennes, l'éq. d'advection se ramène donc à une famille infinie d'EDO. $\square$

Exercice : (i) On étudie le cas $N=1$, et $a(x,t) \equiv c$, constante réelle, e.g. $c>0$. Expliciter le changement de variable $(x,t) \mapsto (y,s) := (\phi_{0,t}(x), t)$. On suppose de plus que $f \equiv 0$. En déduire que l'unique solution $u$ de (1)(2) vérifie :

$$u(x,t) \equiv u_0(x-ct). \qquad (13)$$

(ii) On dit que $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times ]0,+\infty[)$ est une solution faible du Pb de Cauchy (1)(2) si elle vérifie : $\forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R} \times [0,+\infty[)$,

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,(\partial_t \varphi(x,t) + c\,\partial_x \varphi(x,t))\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx = 0. \qquad (14)$$

Montrer que $\forall u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $u$ est solution faible de (1)(2) ssi elle vérifie (13), et qu'alors, $\forall p \in [1,+\infty[$, $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}$.
Noter qu'on ne demande plus à $u$ d'être régulière. $\square$