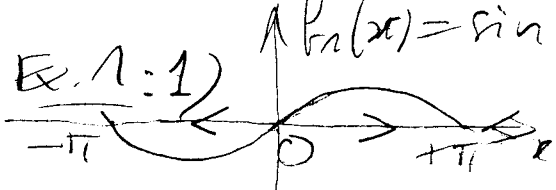
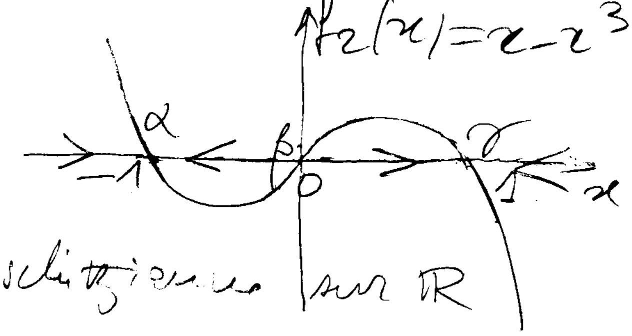
MAMATH. Corrigé succinct du Contrôle du 02/03/09 2008-09

Ex. 1 : 1)



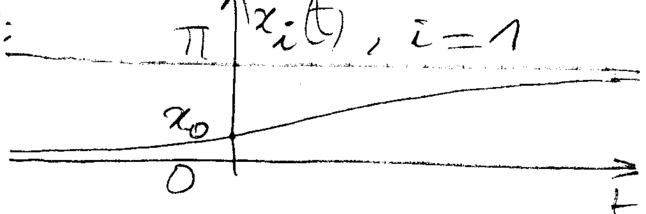


$\begin{cases} f_1 \\ f_2 \end{cases}$ est $\begin{cases} \text{globalement} \\ \text{localement} \end{cases}$ lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

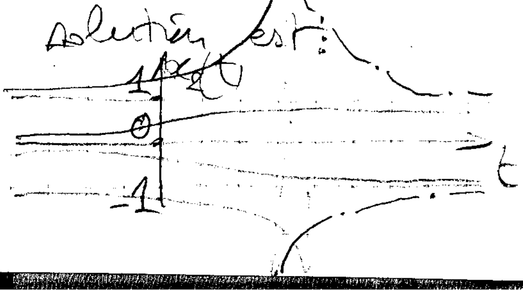
car $|f_1'(x)| = |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, alors que $f_2 \in C_1(\mathbb{R})$ mais $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_2'(x)| = +\infty$.

2) Pour $i = 1$, le thm de Cauchy-Lipschitz "global" s'applique : $\{(t,x) \mapsto f(t,x) := f_1(x)\}$ est continue (/au couple (t,x)) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et uniformément Lipschitzienne :
$\exists L > 0$; $\forall t, x, y$, $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|$ (ici, $L = 1$).
Donc pour $i = 1$, $\exists!$ solution de (1) tq $x_i(0) = x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.
Pour $i = 2$, on ne peut affirmer que l'$\exists$ locale d'une unique solution du Pb de Cauchy.

3) Pour $i = 1$, $x_k = k\pi$ est un état d'équilibre, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Graphiquement, x_k est $\begin{cases} \text{stable} \\ \text{instable} \end{cases}$ $\forall k \begin{cases} \text{impair} \\ \text{pair} \end{cases}$.
En particulier, si $x_0 \in]0, \pi[$, l'allure qualitative du graphe de $\{t \mapsto x_1(t)\}$ est :



4) Pour $i = 2$, on voit graphiquement que $\alpha = -1$ et $\gamma = 1$ sont stables alors que $\beta = 0$ est instable.
Par exemple si $x_0 \in]0, 1[$, l'allure qualitative de la solution est :



On peut justifier ceci en écrivant

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{x_2 - (x_2)^3} = \frac{a}{x_2 - 1} + \frac{b}{x_2} + \frac{c}{x_2 + 1} = 1 \ldots$$

Ex. 2 : 1) L'EDO (2) est d'ordre 2, linéaire, à coeff^ts constants, inhomogène. Notons (2') l'EDO homogène associée : $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, (i.e. $f \equiv 0$). (2')

La solution générale de (2') est combinaison linéaire des $t^k e^{rt}$, $r = r_i$ racine de l'éq. caractéristique :

$r^2 + ar + b = 0$, (EC), $k \leq m_i$ = ordre de multiplicité algébrique de r_i ; cf Ch. 2, thm 2.

Ici, illustrons ceci dans les trois cas :

Rem : $r_1 + r_2 < 0$ et $r_1 r_2 > 0$, d'où $\mathrm{Re}\, r_i < 0$ $\Rightarrow$ sol. bornée (et $\to 0$ qd $t \to +\infty$) dans les 3 cas.

(i) $a = b = 1$, d'où $r^2 + r + 1 = 0$ $r_{1,2} = \left\{ \begin{matrix} j \\ \bar{j} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \pm i\beta$, et $r_1 \neq r_2$. Donc $x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$

$$= e^{-t/2} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

$$= e^{-t/2} C \cos(\beta(t - \theta_0)), \text{ où}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \cos\theta_0 = \frac{A}{C}, \sin\theta_0 = \frac{B}{C},$$

(on exprime e.g. A et B à l'aide des C.I. $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = x_1$)

(ii) $a = 2, b = 1$, d'où $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$, et

$$x(t) = e^{rt}(At + B).$$

(iii) $a = 4, b = 3$, d'où $r^2 + 4r + 3 = 0$, $r_1 = -3 < r_2 = -1$, et

$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$. On calcule A_1, A_2 /aux C.I. ...

2) On écrit (2) ou plutôt (2') comme un système du premier ordre : (4) : $\dot{X} = AX$, où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

D'où $\dot{X} = F(X) := F(t, X)$, avec $F : \underline{\underline{\mathbb{R}}} \times \underline{\underline{\mathbb{R}^2}} \to \mathbb{R}^2$, F continue /au couple (t, X) (ici, le système est autonome), et F lipschitzienne /à X, uniformément /à $t \in \mathbb{R}$, i.e. F est "globalement lipschitzienne /à X". En effet,

$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \|F(t,X) - F(t,Y)\|_\infty = \left\| \int_0^1 \frac{d}{dh} F(t, hX + (1-h)Y)\, dh \right\|_\infty$

$= \left\| \int_0^1 F'(hX + (1-h)Y) \cdot (X - Y)\, dh \right\|_\infty = \left\| \int_0^1 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{A \text{ "= matrice constante}} \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} dh \right\|_\infty$

$\underset{(ici)}{\overset{\leq}{=}} \int_0^1 \|A(X - Y)\|_\infty\, dh \leq \underbrace{|||A|||_\infty}_{:= L} \cdot \|X - Y\|_\infty.$

D'où on déduit la constante de Lipschitz de F
pour $\|\cdot\|_\infty$: $L = |||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}| = \max(1, |a|+|b|)$.
ici

Donc $\forall X_0 = \binom{x_0}{x_1}$, le Pb de Cauchy $\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ (4)
a une sol unique, définie globalement, et en effet, cf Cours, Ch. 2, Thm 3 et 4, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tA}X_0$.

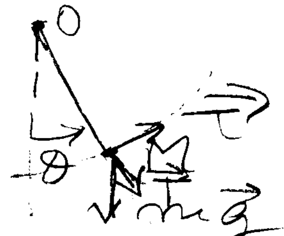
Dans le cas (ii), les valeurs propres sont: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = r_1 = r_2 = -1$, et A a un bloc de Jordan. On a un seul vecteur propre $\vec{W_1} = \binom{1}{\lambda} = \binom{1}{-1}$. On complète e.g. $\{\vec{W_1}\}$ (base incomplète) par $\vec{W_2} = \binom{1}{0}$: vecteur de base.

La matrice de changement de base est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $X = PZ$, d'où
$\dot{Z} = JZ \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2(t) = e^{-t} z_{2,0} \\ \dot{z}_1 + z_1 = e^{-t} z_{2,0} \ (*) \end{cases}$, où -1 est (simple) de l'éq. caractéristique associée à l'EDO linéaire $(*)$, i.e. $r+1=0$. Donc une SP (sol. particulière) de $(*)$ est $\mathfrak{z}_1(t) = Cte^{-t} = z_{2,0}\, t e^{-t}$. Donc la SG de $(*)$ est
$z_1(t) = \mathfrak{z}_1(t) + \underbrace{C'e^{-t}}_{\text{SG de l'éq. homogène } (*'):\ \dot{z}_1 + z_1 = 0}$ finalement.

Finalement, on obtient $\begin{cases} z_2(t) = e^{-t} z_{2,0} \text{ et} \\ z_1(t) = e^{-t}(t z_{2,0} + z_{1,0}), \end{cases}$ et on revient à X_0 en écrivant que $Z_0 = P^{-1}X_0$.

3) Si $f(t) := e^{-ct} \neq 0$, on ajoute à la SG de (2') une SP de la forme $y(t) = \begin{cases} Ce^{-ct} \text{ si } & c^2 + ac + b \neq 0 \\ Cte^{-ct} \text{ si } & c^2 + ac + b = 0, \text{ et } 2c + a \neq 0 \\ Ct^2 e^{-ct} \text{ si } & c^2 + ac + b = 2c + a = 0 \text{ (racine double).} \end{cases}$

Dans tous les cas, la SG de (2) est $x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + Ct^k e^{-ct}$, donc est bornée et $\to 0$ qd $t \to +\infty$. En particulier, si $x(0) = x_0 = 1$ et $\dot{x}(0) = x_1 = -c$, alors $A_1 = A_2 = 0$. E.g. dans le cas (iii), $|x(t)| = e^{-10^4 \cdot t}$ est maximal pour $t = 0$ et vaut 1 : <u>pas de résonance ici</u>.



<u>Ex 3</u> : 1) La loi de Newton est.

$$\frac{d}{dt}(m\vec v) = \vec F = -m\vec g + \vec T,$$

où $\vec T$ est la réaction (inconnue) de la tige, colinéaire à $\vec{OM}$. En projetant $\perp$ à $\vec{OM}$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(m l \dot\theta(t)\vec\tau(t)\right) \cdot \vec\tau(t) = \left(-m\vec g + \vec T\right)\cdot \vec\tau(t)$$

$$= ml\ddot\theta(t)|\vec\tau(t)|^2 + \underbrace{\cancel{ml\dot\theta(t)\frac{d\vec\tau}{dt}\cdot\vec\tau}}_{=0 \text{ (car } |\vec\tau(t)|^2 \equiv 1 \Rightarrow 2\vec\tau\cdot\frac{d\vec\tau}{dt}=0)} = -mg\sin\theta(t).$$

Finalement,

$$ml\ddot\theta(t) = -mg\sin\theta(t), \iff l\ddot\theta(t) = -g\sin\theta(t).$$

2) On obtient donc

$$(5)\ \begin{cases} \dot\theta(t) = \omega(t) \\ \dot\omega(t) = -K\sin\theta(t) \end{cases} \iff \left|\ \dot X = F(X)\right.$$

On applique le thm de Cauchy-Lipschitz <u>global</u>, car $\{(t,X) = (t,X_1,X_2) := (t,\theta,\omega) \mapsto (\omega, -K\sin\theta)\}$ est continue ($/$ à (t,X)) de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$), et lipschitzienne $/$ à X, uniformément $/$ à t :

$$\exists L>0 \ ;\ \forall t\in\mathbb{R}, \forall X,Y\in\mathbb{R}^2, \ \|F(X)-F(Y)\|_\infty \le L\|X-Y\|_\infty.$$

En effet,

$$|F_1(t,X) - F_1(t,Y)| = |X_2 - Y_2| \le \|X-Y\|_\infty, \text{ et}$$

$$|F_2(t,X) - F_2(t,Y)| = |-(K\sin X_1 - K\sin X_2)|$$

$$= -K|\cos\xi|\cdot|X_1 - X_2| \le K|X_1 - X_2|,$$

d'où

$$\|F(X)-F(Y)\|_\infty = \max\left(|X_2-Y_2|, -K|\sin X_1 - \sin Y_1|\right)$$

$$\le \underbrace{\max(K,1)}_{L}\cdot\|X-Y\|_\infty.$$

Donc, <u>pour toute</u> donnée initiale, $\exists!$ solution du Pb de Cauchy associé à (5) et à cette donnée initiale, et cette solution est <u>définie globalement</u>, <u>i.e. $\forall t\in\mathbb{R}$</u>.

3) $\frac{d}{dt} E(t) = \frac{d}{dt} H(X(t)) := \frac{d}{dt} H(\underset{X_1}{\theta(t)}, \underset{X_2}{\omega(t)})$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial X_1}, \frac{\partial H}{\partial X_2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \frac{dX_2}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \nabla H(X(t)) \cdot \frac{dX}{dt}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial X_1}, \frac{\partial H}{\partial X_2}\right) \cdot \begin{pmatrix} +\frac{\partial H}{\partial X_1} \\ -\frac{\partial H}{\partial X_2} \end{pmatrix} \equiv 0,$$

car $H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} - K\cos\theta$,

et

$$(7) \begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = \dot\theta(t) = \omega(t) = \frac{\partial H}{\partial \omega}(\theta(t), \omega(t)), \\ \frac{dX_2}{dt} = \dot\omega(t) = -K\sin\theta(t) = -\frac{\partial H}{\partial \theta}(\theta(t), \omega(t)). \end{cases}$$

Donc, pour toute solution de (5), $E(t) \equiv E(0)$, i.e. $H(\theta(t), \omega(t)) \equiv H(\theta(0), \omega(0))$: on dit que E (ou H) est une intégrale première du système.

Géométriquement, on voit que

(i) $E(t) := H(X(t))$ est une intégrale première d'un système : $\dot X(t) = F(X(t))$, $(*)$

$\forall X$, $\nabla_X H(X) \cdot F(X) = 0$, et que

(ii) $(*)$ est un système Hamiltonien, dont l'Hamiltonien est H si

$\forall X$, $F(X) = (\nabla H)^\perp(X)$, où $(\nabla H)^\perp := \left(\frac{\partial H}{\partial X_2}, -\frac{\partial H}{\partial X_1}\right)$.

Donc (ii) $\Rightarrow$ (i). La réciproque est fausse, e.g. $\dot Y = \alpha(Y)(\nabla H)^\perp(Y)$,

où $\alpha : Y \in \mathbb{R}^2 \mapsto \alpha(Y) \in \mathbb{R}$ est une fonction C^1 arbitraire... cf Cours Ch. 3, cf aussi Lotka-Volterra.

M1 Math. Systèmes dynamiques - 2008-2009 (1)

Corrigé de l'exercice 5, Feuille TD2

On considère le pb de Cauchy dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} \dot{y} = f(y), & (1) \\ y(0) = y_0, & (2) \end{cases}$

où f est lipschitzienne de $J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de constante k.

On est donc dans les hypothèses du thm de Cauchy-Lipschitz version globale, donc a fortiori version locale. Rappels :

. Une solution $\{t \mapsto x(t)\}$ de (S) $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & (3) \\ x(0) = x_0 \in J, & (4) \end{cases}$

où $f : \mathcal{O} := I \times J \to \mathbb{R}^n$, I intervalle (ouvert) de $\mathbb{R}$, J ouvert de $\mathbb{R}^n$, est une fonction C^1 de I dans $\mathbb{R}^n$, tq $\forall t \in I$, $x(t) \in J$ et $x(\cdot)$ vérifie (3) et (4). Une solution maximale est une solution qui ne peut pas être prolongée.

1) Ici $(t, y) \mapsto f(t, y) := f(y)$ est continue /au couple (t, y) de $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times I$ dans $\mathbb{R}$, et f est lipschitzienne : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in I$, $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$.

On peut donc au minimum appliquer CL version locale : $\exists$ une unique solution de (1)(2), définie au moins localement. Soit $y(\cdot)$ son prolongement maximal.

2) On vérifie (Gronwall, cf corrigé oral) que $\forall t \in]t_*, t^*[$ (intervalle maximal), on a : $|y(t) - y_0| \leq |t| |f(y_0)| e^{k|t|}$.

3) Mq y est une sol. globale (e.g. dans le futur) :

- soit $t^* = +\infty$ et y est définie globalement " " ".
- soit $t^* < +\infty$. Alors thm des bouts, $\exists$ une suite extraite (t_n) tq $t_n \to t^*_-$ et :
  - soit $\|y(t_n)\| \underset{(n \to +\infty)}{\longrightarrow} +\infty$: impossible ici d'après Gronwall,
  - soit $\exists y^* \in \mathbb{R}$ et une nouvelle suite extraite (t_n) tq $y(t_n) \underset{(n \to +\infty)}{\longrightarrow} y^*$, et $(t^*, y^*) \notin \mathbb{R} \times I$, i.e. ici $y^* \notin I$.

⚠ Dans ce cas, $y(\cdot)$ est bien une solution globale.

Ex. $f : y \in I :=]\frac{1}{e}, +e[\to f(y) = y \in \mathbb{R}$, $y(0) = y_0 = 1 \in I$. La sol. maximale de (1)(2) est $y(t) = 1 . e^t$, définie sur $]t_*, t^*[=]-1, 1[$: elle est globale.