Ch. 1. Equations aux différences (E.D.)

§1 - Introduction - Premières définitions

. Une éq. aux différences décrit un phénomène évoluant en temps discret : chaque année, jour.. où on peut calculer la valeur x_{t+1} d'une variable en fonction de x_t et $f_t := f(t) =$ fonction de t connue

. Ex 1.
$$\boxed{x_{t+1} + a_0 x_t = \underbrace{f(t) := f_t}_{\text{connue}} \quad (1)}$$

nouvelle valeur, déterminer par x_t et par le second membre

. Def. 1 : . Dans cet exemple, on dit que (1) est une ED d'ordre 1 : x_{t+1} ne dépend que de x_t et f_t : x_{t+1} ne dépend pas de $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_0$.

. De plus, ici, le 1er membre : $L(x_t, x_{t+1}) = x_{t+1} + a_0 x_t$ est une fonction linéaire de $x_{t+1}, x_t \dots$ on dit que (1) est une E.D. linéaire :

$$L(y_t + \alpha z_t, y_{t+1} + \alpha z_{t+1}) = L(y_t, y_{t+1}) + \alpha L(z_t, z_{t+1}) : \quad (2)$$

$L(x_t, x_{t+1})$ est un polynôme de degré 1 en x_t, x_{t+1}, sans terme constant.

. La fonction $t \mapsto f_t$ est supposée connue.

Si $f_t \equiv 0$, on dit que (1) est une E.D. homogène, ou " sans second membre ".

Dans ce cas, noter que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) si les suites $y=(y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $z=(z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ vérifient $\forall t,\ L(y_{t+1}, y_t) = f_t \equiv 0$ et $L(z_{t+1}, z_t) \equiv 0$, alors la suite $x := \alpha y + \beta z := (x_t)_{t\in\mathbb{N}} := (\alpha y_t + \beta z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ vérifie, d'après (2)

$$\forall t,\ L(x_{t+1}, x_t) = \alpha \underbrace{L(y_{t+1}, y_t)}_{=0} + \beta \underbrace{L(z_{t+1}, z_t)}_{=0} = 0$$

Thm 1: si (1) est une éq de récurrence linéaire homogène (ici d'ordre 1), l'ensemble des suites $x := (x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ solutions de (1) est un espace vectoriel

Déf. 2:

- Si $f_t \not\equiv 0$ i.e. si au moins pour une valeur particulière de t, on a $f_t \neq 0$, alors on dit que l'éq. de récurrence linéaire (1) est inhomogène, ou "avec second membre"
- En général, le(s) coefficient(s) de L, ici 1 et a_0 peuvent dépendre de t, mais ils sont connus. S'ils n'en dépendent pas, on dit que l'éq. de récurrence linéaire (1) est à coefficients constants.

Exercice 1: on considère les éq. de récurrence suivantes:

$x_{t+1} + 2x_t = t^3, \quad t = 0, 1, \ldots$

$x_{t+1} + t\, x_t = 0, \quad t = \ldots$

$x_{t+1} + \frac{1}{4} x_t = 0, \quad \ldots$

$x_{t+1} + \cos x_t = t, \quad \ldots \quad ; \quad x_{t+1} + x_t + x_{t-1} = 0$

Pour chaque équation, donner son ordre, dire si elle est linéaire, homogène, à coefficients constants...

<u>Ex. 2</u> : supposons que pour déterminer x_{t+2}, on ait besoin de x_{t+1} et de f_t, <u>et, aussi de x_t</u> (mais pas de x_{t-1}), alors on dit que <u>l'éq. de récurrence est d'ordre 2</u>.

Ex. supposons que la relation entre x_t, x_{t+1}, x_{t+2} soit :

$$\boxed{x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = f(t) = f_t, \quad t = 0, 1, \dots} \quad (3)$$

x_{t+1} connue depuis $(t+1)$; x_t connue depuis l'instant t ; f_t connue $\forall t$

x_{t+2} déterminée à l'instant $(t+1)$ par (3)

<u>Déf. 3</u> . on dit que (3) est une <u>éq. de récurrence d'ordre 2</u>, <u>linéaire</u>, car ici le 1er membre $L(x_{t+2}, x_{t+1}, x_t)$ dépend <u>linéairement</u> de la suite $x = (x_0, x_1, \dots, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots)$

. on dit que (3) est de plus <u>à coeff^{ts} constants</u> ssi a_1 et a_0 ne dépendent pas de t, et <u>homogène</u> ssi $\forall t \; f_t = 0$.

<u>thm 1'</u>. <u>Si</u> (3) est <u>homogène</u>, <u>le thm 1 s'applique encore : l'ensemble des suites</u> $x = (x_t)_{t \in \mathbb{N}} = (x_0, x_1, \dots, x_t, \dots)$ <u>solutions</u> de (3) <u>est encore un espace vectoriel</u>.

<u>Exercice 2</u> : démontrer le thm 1', en montrant encore que l'ensemble de ces suites solutions de (3) est stable par addition et multiplication par un scalaire : c'est donc encore un <u>sous-espace vectoriel</u> (s.e.v.) de l'espace vectoriel de toutes les suites à termes réels ou complexes. □

• <u>But de ce chapitre</u> : il s'agit d'étudier les équations de récurrence, d'abord (non)(linéaires), d'ordre 1, puis d'ordre 2, de préciser le nombre de conditions initiales, puis les solutions explicites quand c'est possible, les états d'équilibre, la stabilité quand $t \to +\infty$, de décrire des exemples intéressants pour l'économie.

• Dans les <u>ch. suivants</u>, on <u>remplacera</u> le temps <u>discret</u> par un temps t <u>continu</u> ($t \geq 0$), et les <u>équations</u> {<u>aux différences</u> / de récurrence} par des <u>équations différentielles ordinaires</u> (<u>EDO</u>). On dit aussi : <u>systèmes dynamiques</u>, <u>discrets</u> <u>ou</u> <u>continus</u>.

§2 - <u>Etude des équations aux différences linéaires d'ordre 1, à coefficients constants</u>

. On cherche donc une suite $x := (x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ solution de $x_{t+1} + a_0 x_t := L(x_{t+1}, x_t) = f_t, \forall t \geq 0$, (1) avec $\underline{a_0 \in \mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$...) <u>connu</u>, <u>supposé constant</u> et <u>le second membre f_t connu</u> $\forall t \in \mathbb{N}$.

2.1 - <u>Etude de l'équation homogène</u>. On suppose ici $f_t \equiv 0 \quad \forall t$. Donc (1) devient

$$\boxed{L(x_{t+1}, x_t) = x_{t+1} + a_0 x_t = \underline{\underline{0}}, \forall t = 0, 1, \dots} \quad (1')$$

<u>Idée</u> : on cherche des <u>suites géométriques</u> : $\underline{x_t = \lambda^t, t = 0, 1 \dots}$ <u>solutions de (1')</u>. On en déduit que

$$x_{t+1} + a_0 x_t = (\lambda + a_0) x_t = 0, \forall t$$

Donc si la suite $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ n'est pas $\equiv 0$, on en déduit que **λ est racine de l'équation caractéristique** :

$$P(\lambda) := \lambda + a_0 = 0 \qquad \text{(EC)}$$

Evidemment, cette équation du 1^er^ degré a une solution unique : $\lambda = \lambda_1 = -a_0$, et $\forall x_0$, la suite de terme général $x_t = (\lambda)^t x_0 = (-a_0)^t x_0$ est solution de (1')

Thm 2 : on suppose $a_0 = c^{te}$. Soit $\lambda = -a_0$ l'unique solution de (EC) :

(i) $\forall c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), la suite de terme général $x_t = \lambda^t c$, $t = 0, 1, \ldots$, est l'unique suite solution de (1') qui vérifie la condition initiale : $x_0 = c$.

Donc pour définir tous les termes d'une suite $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ solution de (1') [ou de (1)], il suffit de connaître x_0, et d'en déduire successivement x_1, puis x_2, puis...

(ii) Toutes les suites solutions de (1') sont proportionnelles : Si $y_0 = \alpha x_0$, alors $\forall t = 0, 1, \ldots$, $y_t = \lambda^t y_0 = \alpha \lambda^t x_0 = \alpha x_t$ (le même α !) : l'espace vectoriel E des solutions de (1') est de dimension 1.

(iii) Comportement quand $t \to +\infty$: stabilité

Soit $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une solution qlcq de (1'). Il y a 4 cas :

Cas 1 : $\lambda = \lambda_1 > 1$. Alors $\lambda^t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Donc

$|x_t| = |x_0| \lambda^t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et $\operatorname{sgn}(x_t) = \operatorname{sgn}(x_0)$ (signe de x_t)

Cas 2 : $\lambda = \lambda_1 = 1$. Alors $x_t \equiv x_0 = c^{te}$

Cas 3 : $-1 < \lambda = \lambda_1 < 1$. Alors $x_t = (\lambda^t) x_0 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (en changeant de signe si $\lambda < 0$).

Cas 4 : $\lambda \leq -1$. Alors $x_t = \lambda^t x_0$ n'a pas de limite quand $t \to +\infty$ (et $|x_t| \to +\infty$ si $\lambda < -1$)

Dém. cf exercices. $\square$

• Rem. ⚠ Attention au signe de $\lambda = \lambda_1 = -a_0$.
Souvent les quantités intéressantes (prix, ... doivent rester de signe constant. Vérifiez...

2.2. Etats d'équilibre. Stabilité

Def. 4 :

(i) On dit que le scalaire $x_e = c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est un état d'équilibre de l'éq. homogène (1') (ou de l'éq. non homogène (1)) si la suite constante :
$x_t \equiv c, \forall t \in \mathbb{N}$
est solution de (1') (ou de (1)).
Dans ce cas, où les coefficients sont constants, le second membre f_t est nécessairement constant (éventuellement, $f_t \equiv 0$: cas homogène).

(ii) On dit qu'un état d'équilibre c est globalement stable si pour toute condition initiale x_0, $x_t \to c$ quand $t \to +\infty$.

Thm 3 : Soit (1') une équation de récurrence linéaire, à coefficients constants, homogène. Alors

(i) $c = 0$ est un état d'équilibre de (1')

(ii) si $\lambda = -a_0 = 1$, alors tout scalaire c est aussi un état d'équilibre. Sinon, 0 est le seul état d'équilibre

(iii) 0 est globalement stable ssi $-1 < \lambda = -a_0 < 1$.

Dém. cf exercices. $\square$

2.3. Solution de l'équation inhomogène :

Thm 4 : valable aussi pour une ED linéaire d'ordre qlcq, à coeff^{ts} constants ou non :

La solution générale (SG) de l'éq. inhomogène (1) est somme d'une solution particulière (SP) de l'éq. inhomogène (1) et de la solution générale (SG) de l'éq. homogène (1'). Par exemple, si (1) est d'ordre 1, linéaire, à coeff^{ts} constants,

$$L(x_{t+1}, x_t) = f(t) \qquad (1)$$

$$L(y_{t+1}, y_t) = 0 \qquad (1')$$

Dém. Soit $(z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une SP de (1') :

$$L(z_{t+1}, z_t) = z_{t+1} + a_0 z_t = f(t) \qquad (1_{bis})$$

Posons $y_t := x_t - z_t$, où $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est la SG de (1) : $L(x_{t+1}, x_t) = x_{t+1} + a\, x_t = f(t)$ (1)

En soustrayant, on obtient

$$L(x_{t+1}, x_t) - L(z_{t+1}, z_t) = L(x_{t+1} - z_{t+1}, x_t - z_t)$$

$$= L(y_{t+1}, y_t) \qquad = f(t) - f(t) = 0,$$

donc $(y_t)_{t\in\mathbb{N}} := (x_t - z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une solution qlcq (= la SG) de l'éq. homogène (1'), et réciproq^t. $\square$

Solutions particulières (SP) de l'éq. inhomogène (1) :

Thm 5 : si $(1)_m$ est une ED d'ordre $m \geq 1$, linéaire, à coeff^{ts} constants, et si ... ↓ on cherche une SP ... ↓

i) f_t est constant | i) x_t = constant, sinon $x_t = at + b$, sinon $x_t = P(t)$, $P \in \mathcal{P}_2$ (Pol de d° 2), sinon...

suite p 8 →

(suite)

De même, si .... on cherche une SP ...

(ii) $f_t = Q(t)$, $Q \in \mathcal{P}_m$ (Pol. en t, de d° n) (ii) $x_t = P(t)$, $P \in \mathcal{P}_m$, sinon $P \in \mathcal{P}_{m+1}$, sinon...

(iii) $f_t = e^{\alpha t} = (e^{\alpha})^t = (\lambda)^t$ (iii) $x_t = Ce^{\alpha t}$, $x_t = C\,t\,e^{\alpha t}$, sinon...

(iv) $f_t = e^{i\alpha t}$, ou $\cos(\alpha t)$, ou $\sin(\alpha t)$ (iv) $x_t = a\cos\alpha t + b\sin\alpha t$, sinon $at\cos\alpha t + bt\sin\alpha t$, sinon...

Dém. cf TD. □

Rem. si $f_t \equiv b$ est constant on cherche $x_t \equiv x_e$ solution de

$$\boxed{x_{t+m} + a_{m-1}x_{t+m-1} + \cdots + a_0 x_t = f_t \equiv b} \qquad (1_m)$$

On obtient :

$$\boxed{(1 + a_{m-1} + \cdots + a_0)x_e = b.}$$

Donc, • si $1 + a_{m-1} + \cdots + a_0 \neq 0$, on obtient : $\boxed{x_e = \dfrac{b}{1 + a_{m-1} + \cdots + a_0}}$

x_e est l'unique état d'équilibre

• si $1 + a_{m-1} + \cdots + a_0 = 0$ et $b \neq 0$, l'éq. (1_m) n'a pas d'état d'équilibre, alors que pour l'équation homogène associée,

$$x_{t+m} + a_1 x_{t+m-1} + \cdots + a_0 x_t = 0 \qquad (1'_m)$$

toute constante x_e est solution, cf thm 3, cas (ii). Noter que si on pose $P(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0$, alors

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + a_{m-1} + \cdots + a_0 = 0.$ □

§3 - Equations aux différences linéaires d'ordre n, (à coefficients constants, sauf indication contraire).

On considère surtout le cas $n=2$:

$$x_{t+2}+a_1 x_{t+1}+a_0 x_t = f(t) \qquad (3)$$

3-1- Equation homogène associée :

$$x_{t+2}+a_1 x_{t+1}+a_0 x_t = 0 \qquad (3')$$

. Principe : on cherche encore des solutions : $\boxed{x_t := \lambda^t}$

. Equation caractéristique : on obtient :

$$\boxed{\lambda^2+a_1\lambda+a_0 =: P(\lambda)=0} \quad (EC_2)$$

Thm 6 : $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}=(\lambda^t)_{t\in\mathbb{N}}$ est solution de $(3')$ ssi λ est solution de (EC_2).

On note λ_1 et λ_2 les racines de (EC_2). Alors

(i) si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors la SG de $(3')$ est de la forme $x_t=\alpha(\lambda_1)^t+\beta(\lambda_2)^t$

(ii) si $\lambda_1=\lambda_2$ est racine double de (EC_2), alors la SG de $(3')$ est de la forme

$$x_t=(\alpha t+\beta)(\lambda_1)^t$$

(iii) ATTENTION : λ_1 et λ_2, α et β peuvent être complexes.

Dém. et exemples : cf TD. En particulier, si $\lambda_1=\lambda_2 := \lambda$ est racine double de (EC_2), alors $x_t=\lambda^t$ est solution comme dans le cas général, et de plus $x_t = t\lambda^t$ est aussi solution, car

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = (t+2)\lambda^{t+2} + a_1(t+1)\lambda^{t+1} + a_0 t\lambda^t$$

$$= \underbrace{2\lambda^{t+2} + a_1\lambda^{t+1}} + \underbrace{t\lambda^{t+2} + a_1 t\lambda^{t+1} + a_0 t\lambda^t}$$

$$= \lambda^{t+1}\underbrace{(2\lambda + a_1)}_{=P'(\lambda)=0} + t\lambda^t\underbrace{(\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)}_{=P(\lambda)=0} = 0. \quad \square$$

(car λ racine double de (EC_2)) (car λ racine de (EC_2))

3.2 – Etats d'équilibre de (3) ou (3'). stabilité

Thm 7: on suppose l'ED (3), d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants, à second membre constant :

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = f_t = b, \forall t \in \mathbb{N} \quad (3'')$$

Alors

(i) x_e = constante est un état d'équilibre pour (3'') ssi $\boxed{(1 + a_1 + a_0)x_e := P(1)x_e = b}$,

où $P(\lambda) := \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ = 1er membre de (EC_2)

(ii) Donc si $P(1) \neq 0$, i.e. si $\lambda = 1$ n'est pas racine de (EC_2), alors (3'') admet un seul état d'équilibre $\boxed{x_e := \frac{b}{P(1)}}$.

(iii) Dans ce cas, la SG de (3') est

$$x_t = \begin{cases} \frac{b}{P(1)} + \alpha\lambda_1^t + \beta\lambda_2^t, & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ et } \lambda_1, \lambda_2 \neq 1 \\ \frac{b}{P(1)} + \lambda_1^t(\alpha t + \beta), & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \ (\neq 1) \end{cases}$$

(iv) Cet état d'équilibre est globalement stable ssi $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$

λ_1 et λ_2 peuvent être complexes, cf TD

- **Dém. et illustrations** : cf TD pour plus de détails
- **Exemple 1** : $6x_{t+2} - x_{t+1} - x_t = 4$ $\quad (*)$

  Equation homogène associée : $6x_{t+2} - x_{t+1} - x_t = 0$.

  Equation caractéristique : $P(\lambda) = 6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

  Racines : $\lambda = \dfrac{1 \mp \sqrt{\Delta}}{12}$, $\Delta = (-1)^2 - 4.(-1)6 = 25 = 5^2$

  $$\lambda_1 = \frac{1}{12}(1-5) = -\frac{1}{3} < \lambda_2 = \frac{1}{12}(1+5) = +\frac{1}{2}.$$

  SG de l'ED homogène : $x_t = \alpha\lambda_1^t + \beta\lambda_2^t$

  SP de l'ED inhomogène :

  $x_t = x_e = \dfrac{4}{P(1)} = \dfrac{4}{4} = 1$: unique état d'équilibre

  Comme $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2| < 1$, $x_e = 1$ est globalement stable ; pour toute solution de l'ED $(*)$, $x_t \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$,

  car $x_t = 1 + \alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^t$.
- **Exemple 2** : $x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t = 5$ $\quad (**)$

  Eq. homogène associée : $x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4x_t = 0$

  Eq. caractéristique : $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

  Racines : $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda = 2$

  SG de l'eq. homogène : $x_t = (\alpha t + \beta)2^t$ (exo : vérifier que $x_t = 2^t$ et $x_t = t2^t$ sont solutions.

  SP de $(**)$: $x_e = \dfrac{5}{P(1)} = \dfrac{5}{1} = 5$.

  SG de $(**)$: $\boxed{x_t = 5 + (\alpha t + \beta)2^t}$

  Pour toute solution de $(**)$, $x_t \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$, car $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$

⚠ Par contre, étudier l'ED : $x_{t+1} - \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$:

on a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{4}$, et la SG de $(**)$ est $x_t = 1 + (\alpha t + \beta)\left(\frac{1}{4}\right)^t$, et $(\alpha t + \beta)\left(\frac{1}{4}\right)^t \to 0$ quand $t \to +\infty$, bien que $t \to +\infty$, car l'exponentielle

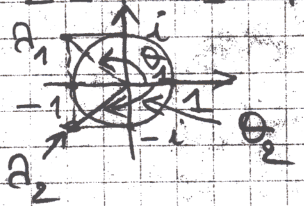
$\therefore$ $\left(\frac{1}{4}\right)^t = e^{t\ln 1/4}$ l'emporte sur la fonction puissance $t \mapsto t$: $t\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^t \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} 0$.

• Exemple 3 : $x_{t+2} + 2x_{t+1} + 2x_t = 10$ $(***)$

Eq. homogène : $x_{t+2} + 2x_{t+1} + 2x_t = 0$ $(***')$

Eq. caractéristique : $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$; $\Delta = 4 - 8 = -4$

Racines : $\lambda_1 = -1 + i$; $\lambda_2 = -1 - i$



⚠ Les racines λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées, de module $|\lambda_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} = |\lambda_2|$, d'arguments $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\theta_2 = -\theta_1 = -\frac{3\pi}{4}$. On écrit aussi

$$\lambda_1 = |\lambda_1|\, e^{i\theta_1} := \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Donc $\lambda_{\substack{1\\2}} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 \pm i$

Alors $\forall\, t = 0, 1, \dots, n, \dots$

$$(\lambda_1)^t = (\sqrt{2})^t \cdot \left(\cos\left(\frac{3t\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3t\pi}{4}\right)\right)$$

et de même

$$(\lambda_2)^t = (\sqrt{2})^t \cdot \left(\cos\left(-\frac{3t\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3t\pi}{4}\right)\right)$$
$$= (\sqrt{2})^t \cdot \left(\cos\left(\frac{3t\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3t\pi}{4}\right)\right)$$

Donc toute solution de l'éq. homogène $(***')$ vérifie : $x_t = \alpha(\lambda_1)^t + \beta(\lambda_2)^t$, donc $|x_t| \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$, car $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2} \# 1{,}414 > 1$.

3.3. Problème à condition initiale : on considère encore l'ED (3), d'ordre 2, linéaire, (éventuellt) à coefficients (non) constants : $\boxed{x_{t+2} + a_1(t)x_{t+1} + a_0(t)x_t = f_t}$ $(3'')$

thm 8 :

i) Pour toute condition initiale (C.I.) (y_0, y_1), la solution $(x_t)_{t\in\mathbb{N}}$ de l'ED (3″), avec C.I.) la C.I. : $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$ est déterminée de manière unique.

(ii) En particulier, si l'éq. (3″) est homogène : $f_t \equiv 0$, alors l'e.v. E des suites (x_t) solutions est de dimension 2 : toute suite (x_t) solution est combinaison linéaire de deux solutions non proportionnelles.

(iii) Dans le cas à coefficients constants (3) il suffit de trouver une SP (y_t) de l'éq inhomogène (3), et, comme au thm 7, (iii) les deux coefficients α et β qui définissent la solution générale de l'éq. homogène (3′).

On a toujours :

$$x_t = \underbrace{y_t}_{\text{SP de (3)}} + \begin{cases} \alpha\,(\lambda_1)^t + \beta\,(\lambda_2)^t, & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ (\lambda_1)^t\,(\alpha t + \beta), & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases}$$

même s'il n'y a pas d'état d'équilibre (cas où $P(1) = 0$)

Dém. et illustrations : cf TD. □

Thm 8' :

On considère l'(ED) homogène

$$x_{t+2}+a_1 x_{t+1}+a_0 x_t=0, \qquad (3''')$$

et l'équation caractéristique associée

$$r^2+a_1 r+a_0=0. \qquad (EC)$$

A) On calcule le discriminant $\Delta := (a_1)^2-4a_0$ de (EC)

A1) Si $\Delta>0$, les 2 racines de (EC) sont

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a_1\mp\sqrt{\Delta}}{2}.$$ Elles sont réelles et $\neq$. La SG de (3''') est alors $y_t=\alpha(\lambda_1)^t+\beta(\lambda_2)^t$, où α, β sont quelconques (réels)

A2) Si $\Delta=0$, les 2 racines de (EC) sont réelles et confondues :

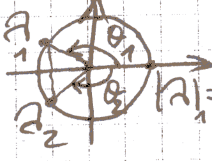
$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$ somme des racines.
La SG de (3''') est alors $y_t=e^{\lambda t}(\alpha t+\beta)$, où α, β sont réels qlcq

A3) Si $\Delta<0$, les 2 racines de (EC) sont distinctes, complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a_1}{2}\pm i\sqrt{|\Delta|}, \quad \text{où } i=\sqrt{-1},\ |\Delta|=-\Delta>0,$$

. On calcule $\rho := |\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{\frac{a_1^2}{4}+\frac{|\Delta|}{4}}$ = module de $\lambda_{1,2}$,

et $\theta_1=\arg\lambda_1=-\arg\lambda_2=-\theta_2$



$|\lambda_1|=|\lambda_2|$

. Alors $\forall t\in\mathbb{N}$, $(\lambda_{1,2})^t=(\rho e^{i\theta_{1,2}})^t=\rho^t e^{it\theta_{1,2}}$
$=\rho^t(\cos(t\theta_{1,2})+i\sin(t\theta_{1,2}))$

. On pose alors (SG de (3''') à valeurs réelles :

$$y_t=(\rho)^t\,(A\cos(t\theta_1)+B\sin(t\theta_1)) \quad (A, B \text{ qlcq})$$ (ou θ_2, en changeant A, B)

ou

$$y_t=(\rho)^t\,C\cos(t\theta_1+\theta_0), \quad (C, \theta_0) \text{ qlcq}$$

B) On exprime α, β, ou A, B, ou C, θ_0 en fonction des conditions initiales si on cherche une SP (y_t) de (3''') avec y_0, y_1 donnés.

§4 - E.D. non linéaires du premier ordre

Notation : on note le temps discret $n \in \mathbb{N}$ ou $t \in \mathbb{N}$

. On considère ici uniquement le cas d'une ED autonome :

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t), & (1) \\ x_0 = x(0) \text{ donné : } \quad \text{condition initiale} & (C.I.) \end{cases}$$

le temps discret t n'intervient pas explicitement dans (1)

. Evidemment, la suite $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est déterminée de manière unique par (1) et (C.I.). Rem ⚠ cette fois, l'ensemble E des suites (x_t) solutions n'est pas en général un e.v. !!

. Exemple 1 : le modèle de croissance de Solow (discret)

$$k_t = \frac{1}{1+n}\left[s\, f(k_t) + (1-\delta) k_t\right] := g(k_t), \quad 0<s<1, \quad 0<\delta<1, \quad n>0$$

f fonction ↗ et concave tq $\begin{cases} f(0) = 0, \ f'(k) \underset{k \to 0}{\to} +\infty, \\ \text{et } f'(k) \underset{k \to +\infty}{\to} 0 \end{cases}$

k : capital par tête,
$f(k)$: production de capital " "
s : propension marginale à économiser
δ : taux de dépréciation du capital
n : taux de ↗ de la population

. Etats d'équilibre : ils correspondent à $k_t \equiv k_e = c^{te} \Leftrightarrow \boxed{g(k_e) = k_e}$

On étudie la fonction : $g(k) := \frac{1}{1+n}(s\, f(k) + (1-\delta) k)$:

$g'(k) = \frac{1}{1+n}(s\, f'(k) + 1 - \delta) > 0,$

$g''(k) = \frac{1}{1+n}\, s\, f''(k) < 0$. Ensuite, $g'(k) \to \begin{cases} +\infty & \text{pour } k \to 0_+ \\ 1-\delta & \text{"} \quad k \to +\infty \end{cases}$

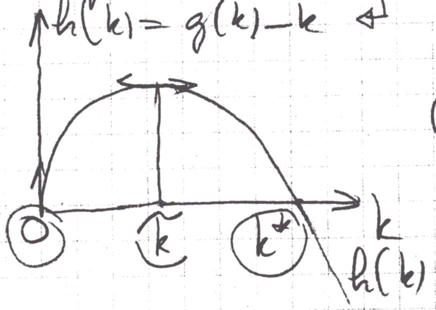
Donc posons $h(k) := g(k) - k$. On a :

$$h'(k) = \begin{cases} g'(k) - 1 \to +\infty & (k \to 0_+) \\ -\delta < 0 & (k \to +\infty) \end{cases}$$

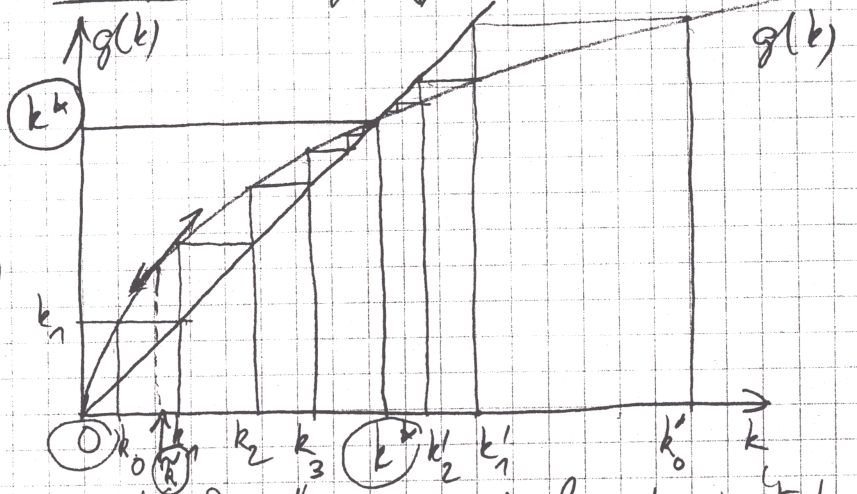
k	0	$\tilde{k}$	k^*	$+\infty$
$h''(k)$	$-$	$-$	$-$	
$h'(k)$	$+\infty \searrow +$	0 $-$	$-$	
$h(k)$	$0_+ \nearrow$	$+ \searrow$	0 $-$	

Donc $g(k) = k$ ssi $\begin{cases} k = 0 \text{ ou} \\ k = k^* \end{cases}$

Graphe de h :



Graphe de g :



Donc le graphe de g décrit d'une part les deux états d'équilibre : $k=0$ et $k=k^*$, et d'autre part leur stabilité : (i) $\forall\, k_0 \in]0,k^*]$, par récurrence on voit que

$\forall t \in \mathbb{N},\ 0 \leq k_t \leq g(k_t) = k_{t+1} \leq k^*$, donc la suite $(k_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est $\uparrow$ et majorée par k^* : elle CV vers ℓ tq $0 < \ell \leq k^*$, et par continuité de g, $k_{t+1} = (k_t) \underset{(t\to+\infty)}{\longrightarrow} g(\ell)$

Donc $\ell = g(\ell) > 0$, donc $\ell = k^*$:

$\forall\, k_0 \in]0,k^*]$, (k_t) tend en croissant vers k^* quand $t \to +\infty$.

(ii) de même, $\forall\, k_0 \geq k^*$, on a :

$\forall t \in \mathbb{N},\ k^* \leq k_{t+1} = g(k_t) \leq k_t \leq \dots \leq k_0$, donc la suite (k_t) est $\downarrow$ et minorée, donc CV en $\downarrow$ vers une limite $\ell \geq k^*$, tq $\ell = g(\ell)$, donc $\ell = k^*$:

$\forall\, k_0 \geq k^*$, (k_t) tend en décroissant vers k^* quand $t \to +\infty$.

Ceci illustre un cas particulier du Thm de point fixe de Picard :

Thm 9 : Soit la suite $x_{t+1} = f(x_t)$ (1).

Supposons qu'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que (i) $f(I) \subset I$, et

(ii) $\sup_{t\in I} |f'(t)| \leq c < 1$

Thm 9 (suite) :

Alors

(a) $\exists$ un unique point fixe x de f dans I :

$\exists x \in I$, unique, tq $x = f(x)$

(b) $\forall x(0) \in I$, la suite (x_t) solution de

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t) \\ x_0 = x(0) \end{cases}$$

reste dans l'intervalle I $\forall t \in \mathbb{N}$, et CV vers x^* quand $t \to +\infty$: x^* est fortement stable, ou asymptotiquement stable.

Dém. Par récurrence, $\forall x_0 \in I$, $\forall t \in \mathbb{N}$, $x_{t+1} = f(x_t) \in \underbrace{f(I)}_{\subset I}$

Ensuite, $\forall t \in \mathbb{N}$, $|x_{t+1} - x_t| = |f(x_t) - f(x_{t-1})|$

$= |f'(\xi_t)(x_t - x_{t-1})|$,

avec ξ_t entre x_{t-1} et x_t, donc $\xi_t \in I$. Donc $|f'(\xi_t)| \leq c < 1$. Donc

$\forall t \in \mathbb{N}$, $|x_{t+1} - x_t| \leq c\,|x_t - x_{t-1}| \leq \cdots \leq (c)^t\,|x_1 - x_0|$

Donc la série $\sum_{t=0}^{+\infty} (x_{t+1} - x_t)$ CV comme la série géométrique c^t, avec $|c| < 1$. Sa limite est

$$x^* - x_0 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{t=0}^{n-1} (x_{t+1} - x_t) = \lim_{n \to +\infty} (x_n - x_0),$$

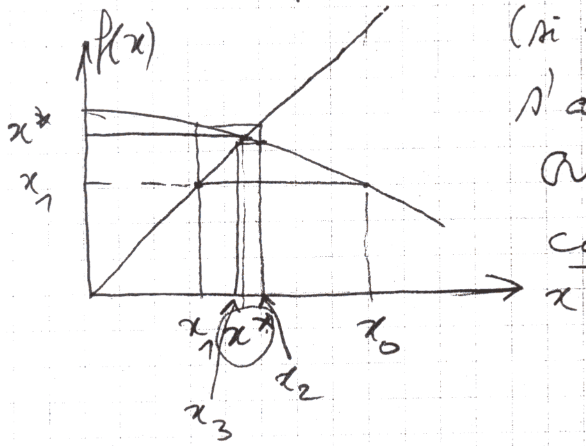
donc $x_n \xrightarrow[(n \to +\infty)]{} x^*$, et de même $x_{n+1} = f(x_n) \xrightarrow[(n \to +\infty)]{} f(x^*) = x^*$,

donc x^* est un point fixe, et c'est le seul car s'il en existait un autre : x_*, on aurait $|f(x^*) - f(x_*)| = |x^* - x_*| \leq c\,|x^* - x_*|$, $\{0 < c < 1$

donc $x^* - x_* = 0$: $x^* = x_*$. $\square$

Rem. Dans l'exemple 1, le Thm s'applique avec $I = [\tilde{k}, +\infty[$. On vérifie cependant directement que si on part de $k_0 \in]0, \tilde{k}]$, au bout d'un nombre fini p de fois, on aura : $\forall n \geq p$, $k_n \geq \tilde{k}$. $\square$

Rem. Dans le cas où f vérifie les hypothèses du Thm, avec $f \searrow$ sur I, on a la figure ci-contre



(si $x_0 > x^*$) : dans ce cas, le Thm 1 s'applique avec $I = [x_1, x_0]$

On a alors une figure du type cobweb (toile d'araignée). □

Exemple 2 : L'équation logistique (indications) (cf E1).

$$\boxed{x_{t+1} = f(x_t) := \lambda\, x(1-x) \quad , \quad \lambda > 0}$$, avec $x_0 \in [0,1]$

On étudie la fonction f :

$f'(x) = \lambda(1-2x)$

x	0	$1/2$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$\lambda/4$	$\searrow 0$

Alors l'intervalle

$I := [0,1]$ est invariant par f si $0 \leq \lambda \leq 4$.

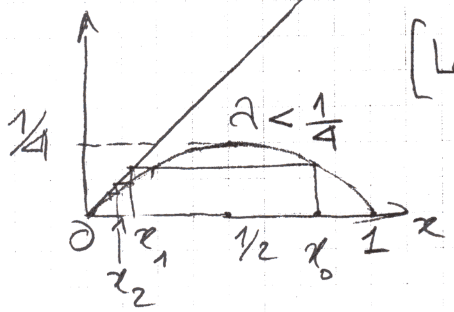
Dans ce cas $\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = |f'(0)| = |f'(1)| = \lambda$

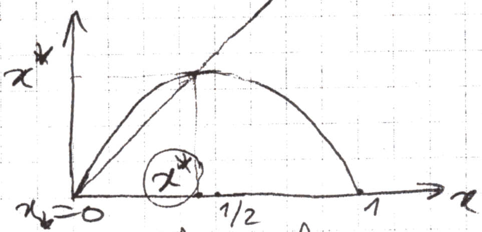
a) Premier cas : $0 < \lambda < 1$, alors $f(I) \subset I$ et $\sup_{x \in I} |f'(x)| = \lambda < 1$

donc f admet un unique point fixe $x^* \in [0,1]$: $x^* = 0$
et $\forall x_0 \in [0,1]$, la suite (x_t) CV en $\searrow$ vers $x^* = 0$:
$x^* = 0$ est un équilibre stable

[La situation est la même pour $\lambda = 1$].

CV monotone





b) Deuxième cas : $1 < \lambda < 3$. Alors f admet deux points fixes sur $[0,1]$: $x_* = 0$ et x^* solution de $x^* = \lambda x^*(1-x^*)$

$\iff x^*(1 - \lambda(1-x^*)) = 0$, $x^* \neq 0 \iff x^* = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \in]0,1]$

D'abord, 0 devient instable. Étudions la stabilité de $x^* > 0$

Etudions f' dans ce cas : $\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |f'(0)| = |f'(1)| = \lambda \in]1,3[$,

donc on ne peut pas appliquer le thm 1 à $I=[0,1]$. Par contre, calculons

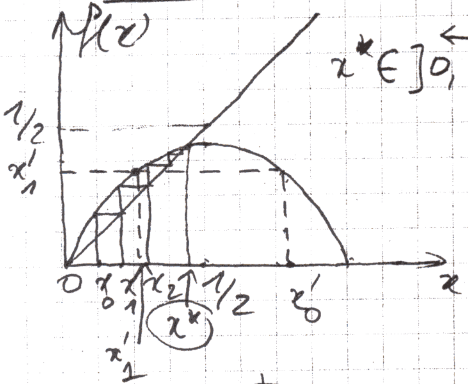
$$|f'(x_e)| = |\lambda(1-2x_e)| = \left|\lambda\left(1-\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}\right)\right| = \frac{\lambda}{\lambda}|(2-\lambda)| = |2-\lambda| < 1.$$

Donc on peut appliquer le thm sur un voisinage de x^*.

<u>Illustration :</u> <u>cas 2 : $1<\lambda<3$</u>

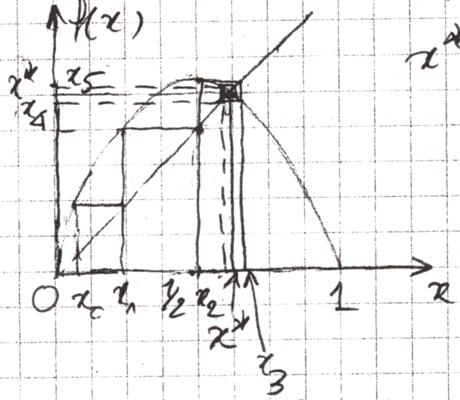
Sous-cas (i) : $1<\lambda<2$; Sous-cas (ii) : $2<\lambda<3$

$x^* \in]0, 1/2[$



CV monotone (au moins à partir d'un certain rang)

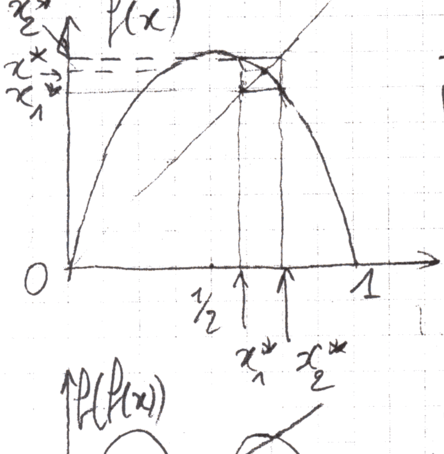
$x^* \in]1/2, 1[$



CV oscillatoire : exemple : ici la suite $(x_{2p}) \nearrow x^*$ $(p\to+\infty)$ et la suite $(x_{2p+1}) \searrow x^*$ (") au moins à partir d'un certain rang.

c) <u>Cas 3</u> : exemple de dynamique complexe : $\boxed{\lambda \in]3,4[}$

A partir d'une valeur critique $\lambda_1 \simeq 3.2$, on a (au moins) la figure suivante (cf "<u>cascade de Feigenbaum</u>") :

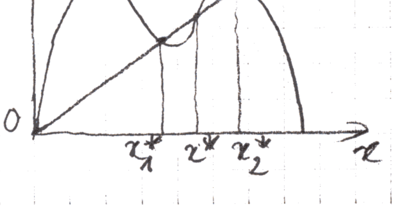


$f(x_1^*) = x_2^*$ et $f(x_2^*) = x_1^*$

[noter que $|f'(x^*)| > 1$].

Alors la suite $(x_{2p}) \underset{(e.g.)}{\longrightarrow} x_1^*$ et $x_{2p+1} \to x_2^*$ (ou l'inverse).

Le graphe de $f\circ f : x \mapsto f(f(x))$ est alors :



$f\circ f$ a 4 points fixes dans $[0,1]$, dont deux stables (localement) : x_1^* et x_2^*. Pour une valeur critique $\lambda_2 > \lambda_1$, $(f\circ f\circ f\circ f)$ a 8 points fixes, dont 4 localement stables, etc...