L1 MASS : Algèbre Linéaire Cours 2 mars 2006

Matrices d'entrées-sorties ou d'inputs-outputs

(d'après C. Simon, L. Blume, *Mathématiques pour économistes*, De Boeck, 1998, §12.5)

Le dernier cours montre que la résolution d'un système de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de n équations à n inconnues est relativement proche de l'inversion d'une matrice A puisque

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{1}$$

Pour un vecteur fixé $\boldsymbol{b}$, il est d'habitude plus rapide de résoudre $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par l'élimination gaussienne (et substitution en remontant). Cependant, s'il faut travailler avec plusieurs membres de droite $\boldsymbol{b}$ différents et la même matrice A, il sera plus facile d'inverser A et utiliser (1).

Par exemple, considérons l'exemple du modèle linéaire de production du premier cours. Il s'agit d'un modèle d'un économie avec n activités de production. Chaque activité produit un seul output avec comme entrées ou inputs les produits des autres activités. Ecrivons x_i pour l'output brut du produit i, et soit a_{ij} la quantité de ressource i utilisé nécessaire à la production d'une unité de produit j. Que c_i représente la demande des consommateurs pour le produit i. La demande totale pour le produit i est alors

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + c_i,$$

la somme de termes correspondant aux quantités du produit i utilisées dans la production des produits $1, 2, \ldots, n$, plus la demande des consommateurs. Dans des conditions d'équilibre de marché (production = demande) on a

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2, \\ \qquad \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + c_n. \end{cases}$$

Ce système devient, en notation matricielle,

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c},$$

et peut être écrit de manière plus adaptée sous la forme

$$(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}. \tag{2}$$

La matrice A des demandes intermédiaires de facteurs est parfois appelée la **matrice de technologie**, en anglais "technology matrix". Nous devons espérer qu'elle reste relativement constante sur une longue période de temps. Le membre de droite $\boldsymbol{c}$ de (2) peut quant à lui varier assez souvent. Pour étudier les solutions de (2) on utilise la matrice inverse :

$$\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{c}.$$

Remarquons que nous supposons $I - A$ inversible, mais que nous devons aussi supposer que la solution de (2) est positive lorsque $\boldsymbol{c}$ est positif. Ceci correspond à l'hypothèse que toute solution de notre système économique conduit à produire des quantités positives de chaque bien. Pour cela, aucun coefficient de la matrice $(I - A)^{-1}$ ne doit être négatif. De plus, l'étude de ce système est compliquée par le fait que toutes les données économiques du modèle sont contenues dans la matrice A. Il est insuffisant de supposer que $I - A$ a une matrice inverse positive. Nous devons poser des conditions sur A qui impliqueront la propriété désirée sur $I - A$.

A partir du moment où les facteurs de production ont des unités naturelles différentes, il est plus pratique de les exprimer toutes en termes monétaires, par exemple en millions d'euros, dans une matrice d'entrée-sortie. Dans ce case, le coefficient (i, j) de la matrice de technologie A indique combien de millions d'euros de bien i sont nécessaires pour produire 1 million d'euros du bien j. La somme des coefficients de chaque colonne de A donne le coût total de production de 1 million d'euros du produit représenté par cette colonne. Puisque nous nous attendons à ce que chaque activité de production fasse un profit comptable positif, la somme des éléments de chaque colonne doit être inférieure à 1. Ceci s'avère être une des conditions pour une matrice de technologie A qui garantisse que $I - A$ possède une matrice inverse positive.

Théorème 1. *Soit A une matrice carrée $n \times n$ dont tous les coefficients sont positifs et la somme des coefficients dans chaque colonne est < 1. Alors $(I - A)^{-1}$ existe et ne possède que des coefficients positifs.*
Si en plus tous les coefficients de A sont strictement positifs, alors tous les coefficients de $(I - A)^{-1}$ sont strictement positifs.

Le théorème se démontre en appliquant la méthode des pivots (Gauss-Jordan) pour inverser $(I - A)^{-1}$ et en voyant que toutes les opérations élementaires que l'on applique sont des formes $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ ou $L_i \leftarrow rL_i$ avec a et r positifs. Quand on applique une suite d'opérations de ce genre à I, les matrices obtenues ont des coefficients positifs.

Pour concrétiser l'exposé précédent, considérons une économie simple à trois industries, avec comme matrice d'entrée-sortie

$$A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,5 & 0,25 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,15 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Supposons que la demande de consommation fluctue entre

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Quelles vont être les production correspondantes ?

Premièrement, calculons $I - A$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 0,85 & -0,5 & -0,25 \\ -0,3 & 0,9 & -0,4 \\ -0,15 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Pour inverse $I - A$ écrivons la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0,85 & -0,5 & -0,25 & 1 & 0 & 0 \\ -0,3 & 0,9 & -0,4 & 0 & 1 & 0 \\ -0,15 & -0,3 & 0,8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et utilisons la méthode des pivots pour réduire les 3 premières colonnes à la matrice identité. Le résultat, arrondi à la troisième décimale, est

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1,975 & 1,564 & 1,399 \\ 0 & 1 & 0 & 0,988 & 2,115 & 1,366 \\ 0 & 0 & 1 & 0,741 & 1,086 & 2,025 \end{array}\right).$$

Les trois dernières colonnes sont $(I - A)^{-1}$. Notons que, comme le prédit le Théorème 1 tous les coefficients sont positifs.

Quand la demande de consommation est $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$, le total des sorties sera

$$\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1,975 & 1,564 & 1,399 \\ 0,988 & 2,115 & 1,366 \\ 0,741 & 1,086 & 2,025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84,77 \\ 75,72 \\ 56,79 \end{pmatrix}.$$

Quqnd la demande de consommation est $\boldsymbol{c}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$, le total des sorties doit être

$$\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1,975 & 1,564 & 1,399 \\ 0,988 & 2,115 & 1,366 \\ 0,741 & 1,086 & 2,025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79,01 \\ 79,5 \\ 69,63 \end{pmatrix}.$$

Léontief a utilisé l'analyse d'entrée-sortie pour étudier l'économie des Etats-Unis en 1958. Il a divisé l'économie en 81 secteurs et les a regroupés en six groupes distincts. Nous allons traiter chacune des six familles comme des industries séparées afin de simplifier notre présentation. Ces six industries sont listées ci-dessous :

	Secteur	**Exemples**
FN	Produits finis non métalliques	Peausserie, mobilier, aliments
FM	Produits finis métalliques	Appareils de construction, appareils ménagers
BM	Métal brut	Produits d'exploitation minière et d'atelier d'usinage
BN	Produits semi-finis non métalliques	Verre, bois, textile, et produits pour l'élevage
E	Energie	Charbon, pétrole, électricité, gaz
S	Services	Services publics, transports, immobilier

Leurs demandes intermédiaires de facteurs sont données dans le tableau suivant. Les unités sont des millions de dollars. Les nombres dans chaque colonne représente les demandes faites (chiffrés en fractions de 1 million de $) par le secteur correspondant sur lui-même et les autres secteurs pour produire 1 million de $ de ses produits. Donc 0,173 en ligne 3 et colonne 2 veut dire que la production d'une valeur de 1 million de $ de produits finis métalliques nécessite une dépense de 173 000 $ en métal brut.

	FN	FM	BM	BN	E	S	secteur demandeur
FN	0,170	0,004	0,000	0,029	0,000	0,008	
FM	0,003	0,295	0,018	0,002	0,004	0,016	
BM	0,025	0,173	0,460	0,007	0,011	0,007	
BN	0,348	0,037	0,021	0,403	0,011	0,048	
E	0,007	0,001	0,039	0,025	0,358	0,025	
S	0,120	0,074	0,104	0,123	0,173	0,234	
secteur fournisseur							

Le tableau suivant donne les estimations de Léontief pour les demandes finales dans l'économie des Etats-Unis de 1958 (en millions de dollars). Le problème est de déterminer combien d'unités ont dû être produites dans chacun des six secteurs afin de faire fonctionner l'économie des Etats-Unis en 1958.

FN	99 640
FM	75 548
BM	14 444
BN	33 501
E	23 527
S	263 985

Pour résoudre ce problème, nous traitons les deux derniers tableaux comme une matrice de technologie A et un vecteur colonne de demandes finales $\boldsymbol{c}$. Comme auparavant l'objectif est de résoudre $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ pour une matrice de colonnes de sorties $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{c}.$$

Nous devons calculer la matrice d'entrée-sortie nette $I - A$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,170 & 0,004 & 0,000 & 0,029 & 0,000 & 0,008 \\ 0,003 & 0,295 & 0,018 & 0,002 & 0,004 & 0,016 \\ 0,025 & 0,173 & 0,460 & 0,007 & 0,011 & 0,007 \\ 0,348 & 0,037 & 0,021 & 0,403 & 0,011 & 0,048 \\ 0,007 & 0,001 & 0,039 & 0,025 & 0,358 & 0,025 \\ 0,120 & 0,074 & 0,104 & 0,123 & 0,173 & 0,234 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,830 & -0,004 & -0,000 & -0,029 & -0,000 & -0,008 \\ -0,003 & 0,705 & -0,018 & -0,002 & -0,004 & -0,016 \\ -0,025 & -0,173 & 0,540 & -0,007 & -0,011 & -0,007 \\ -0,348 & -0,037 & -0,021 & 0,597 & -0,011 & -0,048 \\ -0,007 & -0,001 & -0,039 & -0,025 & 0,642 & -0,025 \\ -0,120 & -0,074 & -0,104 & -0,123 & -0,173 & 0,766 \end{pmatrix}.$$

La matrice inverse de cette matrice d'entrées-sorties nette peut être calculée par la méthode des pivots, et ensuite utilisée pour calculer la matrice colonne des sorties brutes.

$$\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1,234 & 0,014 & 0,006 & 0,064 & 0,007 & 0,018 \\ 0,017 & 1,436 & 0,057 & 0,012 & 0,020 & 0,032 \\ 0,071 & 0,465 & 1,877 & 0,019 & 0,045 & 0,031 \\ 0,751 & 0,134 & 0,100 & 1,740 & 0,066 & 0,124 \\ 0,060 & 0,045 & 0,130 & 0,082 & 1,578 & 0,059 \\ 0,339 & 0,236 & 0,307 & 0,312 & 0,376 & 1,349 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99\,640 \\ 75\,548 \\ 14\,444 \\ 33\,501 \\ 23\,527 \\ 263\,985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 131\,161 \\ 120\,324 \\ 79\,194 \\ 178\,936 \\ 66\,703 \\ 426\,542 \end{pmatrix}.$$

Nous concluons que, par exemple, un total de 131 161 millions de dollars de produits finis non métalliques sont nécessaires pour satisfaire à la fois les demandes intermédiaires et finales de l'économie des Etats-Unis en 1958.

L1 MASS : Algèbre Linéaire — TD 2 mars 2006

5.9. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ une matrice de technologie. Trouvez les vecteurs colonnes de production brute quand la demande finale est

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

(b) *Idem* pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,12 & 0,14 \\ 0,5 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix}$.