L1 MASS : Algèbre Linéaire   Cours 27 février 2006

Systèmes linéaires et matrices

Ecriture matricielle d'un système linéaire

Un système linéaire de m équations en n inconnues peut s'écrire sous la forme d'une seule équation entre matrices. Par exemple les systèmes

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 3, \\ x - 2y + 3z = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 10x - 5y = 3, \\ 6x - 4y = -3 \end{cases}$$

se réécrivent comme des équations matricielles

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & -5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

En général, un système de m équations en n inconnues

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

se réécrit comme une seule équation de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dans cette équation on reconnaît la matrice de coefficients A et la forme vecteur-colonne $\boldsymbol{b}$ du membre de droite. Ce qui est de nouveau est le vecteur colonne d'inconnues $\boldsymbol{x}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système linéaire (*) devient la même chose que :

> **Résoudre une équation matricielle** : Etant donnés la matrice de coefficients A et le vecteur colonne $\boldsymbol{b}$, trouver le ou les vecteurs colonnes $\boldsymbol{x}$ vérifiant
>
> $$(\dagger) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Systèmes de n équations en n inconnues

Quand on a un système de n équations en n inconnues, la matrice des coefficients A est carrée. Elle peut être inversible ou non.

Théorème 1. *Soit A une matrice carrée* ***inversible****. Alors l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a, pour chaque $\boldsymbol{b}$, une solution unique $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.*

Preuve. Quand A est inversible, on a

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b},$$

et réciproquement

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad A\boldsymbol{x} = AA^{-1}\boldsymbol{b} = I\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Ensemble cela donne une équivalence

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

□

La formule du Théorème 1 est particulièrement utile quand on veut résoudre plusieurs systèmes linéaires avec la même matrice de coefficients, mais des membres de droite différents. Par exemple les systèmes

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x + 2y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5, \\ x + 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 6, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

Cela correspond à trois équations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$. Au lieu de résoudre chaque système, on peut calculer A^{-1} et ensuite les trois solutions $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}_i$. Or on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc les trois solutions sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Un système linéaire de n équations en n inconnues se comporte bien différemment quand la matrice des coefficients A n'est pas inversible.

Théorème 2. *Soit A une matrice carrée non inversible. Alors l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ n'a aucune solution $\boldsymbol{x}$ pour certains $\boldsymbol{b}$, et une infinité de solutions $\boldsymbol{x}$ pour d'autres $\boldsymbol{b}$.*

L1 MASS : Algèbre Linéaire — TD 27 février 2006

5.8. Inversez la matrice de coefficients afin de résoudre chaque système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + y = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y \phantom{{}+6z} = 4, \\ 6x + 2y + 6z = 20, \\ -4x - 3y + 9z = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4y \phantom{{}+3z} = 2, \\ 4x + 6y + 3z = 1, \\ -6x - 10y \phantom{{}+3z} = -6. \end{cases}$$