L1 MASS : Algèbre Linéaire Cours 7 février 2006

Matrices

Une **matrice** est un tableau rectangulaire de nombres. Ces nombres, appelés les **coefficients** de la matrice, sont arrangés dans une grille de **lignes** horizontales et de **colonnes**, avec chaque nombre à l'intersection d'une ligne et d'une colonne.

Une matrice avec m lignes et n colonnes est dite de **taille** $m \times n$. La matrice suivante est de taille 3×4 :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 5 & 11 & -2 & 6 \\ 7 & 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Pour parler d'une matrice générale, on utilise deux ou trois notations :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A = (a_{ij}), \qquad A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

Le coefficient d'une matrice qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne s'appelle le **coefficient d'indices** (i, j), ou le coefficient (i, j), ou le (i, j)-ème coefficient, etc. La première indice i est le numéro de ligne, et la deuxième indice j est le numéro de colonne. Par exemple, le coefficient $(1, 1)$ de la matrice C ci-dessus est 1, son coefficient $(2, 1)$ est 5, son coefficient $(3, 4)$ est 10. Le coefficient (i, j) de la matrice A ci-dessus est a_{ij}.

Un **vecteur colonne** est une matrice avec une seule colonne, donc de taille $m \times 1$. Un **vecteur ligne** est une matrice avec une seule ligne, donc de taille $1 \times n$. Une **matrice carrée** est une matrice avec autant de lignes que de colonnes, donc de taille $n \times n$. Un exemple de chaque type :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -0,4 & -0,3 \\ -0,2 & 0,88 & -0,14 \\ -0,5 & -0,2 & 0,95 \end{pmatrix}.$$

Algèbre des matrices

Pour les matrices, on a opérations d'**addition**, **soustraction**, **opposées**, et **multiplication par un scalaire** qu'on a déjà vu aux lycée pour les vecteurs. On a en plus des nouvelles opérations spécifiques aux matrices : le **produit** de deux matrices, et la **transposition**, plus les **opérations élémentaires** sur les lignes qu'on a vues dans le chapitre précédent, et les opérations élémentaires sur les colonnes, qui sont similaires.

Addition

On peut additionner deux matrices de la même taille, c'est-à-dire avec le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. La somme se fait d'une façon qu'on appelle **coefficient-par-coefficient**. Cela veut dire, le coefficient d'indices (i, j) — à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne — de $A + B$ est la somme des coefficients d'indices (i, j) de A et de B :

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 11 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+5 & 0+7 \\ 5+6 & 11+3 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 11 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

On ne peut pas additionner deux matrices de tailles différentes.

Multiplication par un scalaire

Une autre opération est quand on multiplie tous les coefficients d'une matrice par un même nombre. On appelle cela **multiplication par un scalaire**. (Le mot **scalaire** veut dire un nombre, en opposition à une matrice ou un vecteur.) Cela s'écrit :

$$r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \end{pmatrix}$$

Par exemple,

$$2\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soustraction, opposées, matrices nulles

L'opposée d'une matrice A est $-A = -1\cdot A$. La **différence** entre deux matrices de la même taille est $A - B = A + (-B)$. Ainsi les opposées et les différences se calculent coefficient par coefficient, comme les sommes.

Par exemple :

$$-\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 & 3-6 & 5-2 \\ 3-(-2) & -1-3 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Une **matrice nulle 0** est une matrice dont tous les coefficients sont 0, par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une matrice nulle est un élément neutre de l'addition, c'est-à-dire quand on additionne une matrice A avec la matrice nulle $\mathbf{0}$ de la même taille cela donne A. Autrement dit, $A+\mathbf{0} = A$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Egalité et équations de matrices

Deux matrices sont **égales** si elles sont de la même taille, et leurs coefficients sont égaux.

Par conséquence, deux matrices nulles de tailles différentes ne sont pas égales : elles ne sont pas la même matrice, à cause de la différence en taille

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une **équation** entre deux matrices de taille $m\times n$ est équivalent à un système de mn équations entre leurs coefficients. Par exemple, l'équation de matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

est équivalent au système d'équations

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \\ a+c = 0, \\ b+d = -5. \end{cases}$$

Multiplication de matrices

Au lycée vous avez vu le **produit scalaire** de deux vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$, et de deux vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans le plan c'était donné par la formule $\big\langle (x,y),(x',y')\big\rangle = xx' + yy'$. Dans l'espace par $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + yy' + zz'$. Par exemple :

$$\begin{aligned} \langle (1,2),(3,-4)\rangle &= 1\cdot 3 + 2\cdot(-4) = -5, \\ \langle (2,4,3),(4,1,-4)\rangle &= 2\cdot 4 + 4\cdot 1 + 3\cdot(-4) = 0. \end{aligned}$$

On peut faire des produits scalaires analogues dans d'autres $\mathbb{R}^n$. Dans $\mathbb{R}^5$ par exemple, on a :

$$\begin{aligned} \langle (x,y,z,u,v),(x',y',z',u',v')\rangle &= xx' + yy' + zz' + uu' + vv', \\ \langle (1,2,3,4,5),(1,2,3,4,5)\rangle &= 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + 5\cdot 5 = 55. \end{aligned}$$

On définit le produit de deux matrices A et B quand on a

$$\boxed{\text{nombre de colonnes de } A = \text{nombre de lignes de } B.}$$

Ceci est équivalent à

$$\boxed{\text{longueur des lignes de } A = \text{longueur des colonnes de } B.}$$

La matrice produit AB a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B, et ses coefficients sont donnés par :

$$\boxed{\text{coefficient } (i,j) \text{ de } AB = \text{produit scalaire } \langle\ i\text{-ème ligne de } A,\ j\text{-ème colonne de } B\ \rangle.}$$

Donc quand A est de taille $m\times n$, et B est de taille $n\times p$, le produit AB est défini et est de taille $m\times p$. Le coefficient (i,j) de AB est donné par :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj}\end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Par exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 3\cdot 6 & 2\cdot 5 + 3\cdot 7 \\ 1\cdot 4 + 0\cdot 6 & 1\cdot 5 + 0\cdot 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 31 \\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Dans ce cas le produit en ordre inverse est défini

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 + 5\cdot 1 & 4\cdot 3 + 5\cdot 0 \\ 6\cdot 2 + 7\cdot 1 & 6\cdot 3 + 7\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 19 & 18\end{pmatrix}$$

mais cela donne une matrice différente. Un autre exemple :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & T \\ U & V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aS + bU & aT + bV \\ cS + dU & cT + dV \\ eS + fU & eT + fV\end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, le produit en ordre inverse,

$$\begin{pmatrix} S & T \\ U & V\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f\end{pmatrix}$$

n'est pas défini.

Propriétés de l'algèbre des matrices

L'addition des matrices et les deux produits satisfont à plusieurs règles. On les énonce sans démonstration.

L'addition des matrices est associative et commutative :

$$(A+B)+C = A+(B+C), \qquad\qquad A+B = B+A.$$

La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition :

$$r(A+B) = rA+rB, \qquad\qquad (r+s)A = rA+sA.$$

La multiplication des matrices est associative, et est distributive sur l'addition :

$$(AB)C = A(BC), \qquad A(B+C) = AB+AC, \qquad (A+B)C = AC+BC.$$

Il y a d'autres "associativités" pour les produits :

$$r(sA) = (rs)A, \qquad\qquad (rA)B = r(AB) = A(rB).$$

Avertissement : **La multiplication des matrices n'est pas commutative.** Quand on a deux matrices, on a presque toujours $AB \neq BA$, même quand les deux produits sont définis. Parmi les exemples de la page précédente, on en avait un avec $AB \neq BA$, et un autre où AB était défini mais non BA.

Transposition

La **transposée** d'une matrice A de taille $m \times n$ est la matrice de taille $n \times m$ obtenue en intervertissant les lignes et les colonnes de A. Elle est notée A^T ou parfois ${}^tA$. La première ligne de A devient la première colonne de A^T, la deuxième ligne de A devient la deuxième colonne de A^T, et ainsi de suite. Donc le coefficient (i, j) de A devient le coefficient (j, i) de A^T.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour une matrice générale de taille 2×3 on a :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

Les propriétés suivantes de la transposition sont faciles à vér

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad \left(A^T\right)^T = A, \qquad (rA)^T = rA^T.$$

Théorème 1. *Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$. Alors on a*

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T.}$$

La preuve se réduit à montrer que le coefficient (i, j) de $(AB)^T$ comme de $B^T A^T$ est le produit scalaire de la j-ème ligne de A et de la i-ème colonne de B.