L1 MASS : Algèbre Linéaire — Cours 7 février 2006

Matrices carrées particulières

Matrices diagonales et triangulaires

La **diagonale principale** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est la diagonale composée des coefficients a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... C'est la diagonale allant du haut à gauche ("nord-ouest") vers le bas à droite ("sud-est"). Par exemple, les coefficients non nuls de la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont exactement ceux de la diagonale principale. Les **coefficients diagonaux** sont ceux qui se trouvent sur la diagonale principale. Les autres sont les **coefficients non diagonaux**.

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les coefficients non diagonaux sont 0. La matrice D ci-dessus est diagonale.

Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont tous les coefficients strictement au dessous de la diagonale principale sont 0. La matrice U ci-dessous est triangulaire supérieure.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice carrée dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale principale sont 0. La matrice L ci-dessus est triangulaire inférieure.

Matrices symétriques

Une matrice A est **symétrique** s'il vérifie $A = A^T$. Pour une matrice $A = (a_{ij})$, cela signifie que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i, j. Les matrices suivantes sont symétriques

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients d'une matrice symétrique sont symétriques par rapport à la diagonale principale.

Matrice identité

La **matrice identité** I_n est la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont tous les coefficients diagonaux sont 1. Par exemple :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parfois on écrit seulement I.

Si A est une matrice $m \times n$, on a

$$\boxed{I_m A = A, \qquad A I_n = A.}$$

L1 MASS : Algèbre Linéaire — TD 9 février 2006

4.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifiez qu'on a $I_2A = A$ et $AI_3 = A$.

4.2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifiez qu'on a $B(C + D) = BC + BD$.

(b) Vérifiez qu'on a $(BC)D = B(CD)$.

4.3. Soit $E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. Calculez EF et FE. Que voyez-vous ?

4.4. Que pouvez-vous dire concernant une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et symétrique ?

4.5. Pour quelles valeurs des paramètres x et y les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ commutent-elles ? (On dit que B et C **commutent** si on a $BC = CB$.)

4.6. (a) Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ commute avec toute matrice 2×2.

(b) Pouvez-vous trouver d'autres matrices qui commutent avec toute matrice 2×2 ?

(c) Pouvez-vous trouver des matrices qui commutent avec toute matrice 3×3 ?