Il y a eu deux sujets.

I. (a) **Sujet A**. *Quels sont les nombres complexes w satisfaisant à $w^4 = 1 + i\sqrt{3}$?*
D'abord ecrivons $1 + i\sqrt{3}$ en forme polaire $Re^{i\alpha}$. Le module est

$$R = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Pour l'argument on a $e^{i\alpha} = \frac{1+i\sqrt{3}}{R} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, et $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi on a $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
Maintenant soit $w = re^{i\theta}$. On a $w^4 = r^4e^{i4\theta} = 2e^{i\alpha}$. Donc on a $r^4 = 2$ et ainsi $r = \sqrt[4]{2}$. On a aussi $4\theta = \alpha$ et ainsi $\theta = \frac{1}{4}(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
Conclusion : On a $w = \sqrt[4]{2}e^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ et $k = 0, 1, 2, 3$. (Après les 4 premières valeurs de k les valeurs de $e^{i\theta}$ se répètent.)
Sujet B. *Quels sont les nombres complexes w satisfaisant à $w^5 = 1 + i$?*
Ce sont $w = \sqrt[10]{2}e^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$ et $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(b) **Sujet A**. *Quels sont les nombres complexes, écrits sous la forme $u = x + iy$, satisfaisant à $u^2 = 4 + 3i$?*
On a $u^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Donc on a $x^2 - y^2 = 4$ et $2xy = 3$. De plus on a

$$x^2 + y^2 = \left|u^2\right| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

En faisant la somme de deux équations on trouve

$$2x^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) = 5 + 4 = 9$$

donc $x^2 = \frac{9}{2}$ et $x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$. En faisant la différence on trouve

$$2y^2 = (x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = 5 - 4 = 1$$

donc $y^2 = \frac{1}{2}$ et $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Comme on a $2xy = 3 > 0$, on sait que x et y ont le même signe.
Conclusion : Les solutions sont $u = \sqrt{\frac{9}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $u = -\sqrt{\frac{9}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$.
Sujet B. *Quels sont les nombres complexes, écrits sous la forme $u = x + iy$, satisfaisant à $u^2 = 3 + 4i$?*
Les solutions sont $u = 2 + i$ et $u = -2 - i$.

II. (a) **Sujet A**. *Quels sont le* ***point fixe****, le* ***rapport d'homothétie****, et l'****angle de rotation*** *de la similitude directe $\phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ avec $\phi(z) = (2 - 2i)z - 1$?*
Le point fixe est la solution z de $\phi(z) = z$. L'équation $(2 - 2i)z - 1 = z$ se réécrit comme $(1 - 2i)z = 1$, donc on a

$$z = \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i}{1^2+2^2} = \frac{1+2i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Le rapport d'homothétie est $|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
L'angle de rotation est l'argument de $2 - 2i$, qui est le θ dans $e^{i\theta} = \frac{2-2i}{|2-2i|} = \frac{2-2i}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Donc on a $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, qui donne $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Sujet B. *Quels sont le **point fixe**, le **rapport d'homothétie**, et l'**angle de rotation** de la similitude directe $\phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ avec $\phi(z) = (2+2i)z - 1$?*
Le point fixe est $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, le rapport d'homothétie est $2\sqrt{2}$, et l'angle de rotation est $\frac{\pi}{4}$.

(b) **Sujet A**. *Donner la formule de l'application inverse $\phi^{-1}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.*
Quand on a $\phi(z) = w$ alors on a $z = \phi^{-1}(w)$. Donc on écrit $(2-2i)z - 1 = w$ et on trouve $(2-2i)z = w+1$ et finalement

$$\phi^{-1}(w) = z = \frac{w+1}{2-2i} = \frac{w+1}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{(2+2i)(w+1)}{2^2+2^2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)(w+1).$$

Sujet B. *Donner la formule de l'application inverse $\phi^{-1}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.*
On a $\phi^{-1}(w) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right)(w+1)$.

III. **Sujet A**. ***Echelonner*** *le système linéaire suivant. Ensuite* ***résoudre*** *le système.*

$$\begin{cases} x \phantom{{}+2y} + 2z + u = 0, \\ 2x + 2y + 3z + 5u = 0, \\ 3x - y + 8z + u = 0. \end{cases}$$

D'abord on soustrait des multiples de la première équation E_1 des deux autres E_2, E_3 pour faire disparaître les termes en x de E_2 et E_3. Spécifiquement on fait $E_2 \to E_2 - 2E_1$ et $E_3 \to E_3 - 3E_1$. Cela donne

$$\begin{cases} x \phantom{{}+2y} + 2z + u = 0, \\ \phantom{x+{}} 2y - z + 3u = 0, \\ \phantom{x+{}} -y + 2z - 2u = 0. \end{cases}$$

On fait disparaître le terme en y de E_3 (sans y faire rapparaître un terme en x) en faisant $E_3 \to E_3 + \frac{1}{2}E_2$. On trouve

$$\begin{cases} x \phantom{{}+2y} + 2z + u = 0, \\ \phantom{x+{}} 2y - z + 3u = 0, \\ \phantom{x+2y-{}} \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}u = 0. \end{cases}$$

Maintenant le système est échelonné.
Pour résoudre le système échelonné, on voit que x, y, z sont ses variables de tête, donc u est la variable libre. On écrira z, y, x (dans cet ordre) en termes de u. On a $\frac{3}{2}z = \frac{1}{2}u$ et donc $z = \frac{1}{3}u$. On a $2y = z - 3u = \frac{1}{3}u - \frac{9}{3}u = -\frac{8}{3}u$ et donc $y = -\frac{4}{3}u$. Finalement on a $x = -2z - u = -\frac{2}{3}u - \frac{3}{3}u = -\frac{5}{3}u$. Les solutions sont donc les

$$(x, y, z, u) = (-\tfrac{5}{3}u, -\tfrac{4}{3}u, \tfrac{1}{3}u, u) = \tfrac{u}{3}(-5, -4, 1, 3).$$

Pour contrôler les solutions, il suffit de vérifier que $(x, y, z, u) = (-5, -4, 1, 3)$ est bien une solution du système de départ,
Sujet B. ***Echelonner*** *le système linéaire suivant. Ensuite* ***résoudre*** *le système.*

$$\begin{cases} x + 2y \phantom{{}+2z} + u = 0, \\ 2x + 3y + 2z + 5u = 0, \\ 3x + 8y - z + u = 0. \end{cases}$$

Les solutions sont les

$$(x, y, z, u) = (-\tfrac{5}{3}u, \tfrac{1}{3}u, -\tfrac{4}{3}u, u) = \tfrac{u}{3}(-5, 1, -4, 3).$$

IV. **Sujet A**. *Quel est le rang de la matrice suivante, selon la valeur du paramètre t ?*

$$A = \begin{pmatrix} t & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Il est inconvénient d'avoir un paramètre comme le coefficient $(1,1)$ quand on échelonne la matrice (en plus on ne veut pas exclure le cas $t = 0$), donc on échangera les lignes L_1 et L_3. De plus il est convenable de diviser L_3 par 3. Donc on fait $L_1 \to \frac{1}{3}L_3$ et $L_3 \to L_1$ pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ t & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

On soustrait des multiples de L_1 de L_2 et L_3 pour obtenir 0 comme coefficients $(2,1)$ et $(3,1)$. Spécifiquement on fait $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - tL_1$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4-2t & 7-3t \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir 0 comme coefficient $(3,2)$ sans modifier le coefficient $(3,1)$ on fait $L_3 \to L_3 + (2t-4)L_2$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}.$$

Pour $t \neq 1$ toutes les 3 lignes de la matrice échelonnée sont non nulles, donc le rang de A est 3. Mais pour $t = 1$, la dernière ligne est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et le rang de A est 2.

Sujet B. *Quel est le rang de la matrice suivante, selon la valeur du paramètre t ?*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & t \end{pmatrix}$$

Pour $t \neq 9$ le rang de A est 3. Pour $t = 9$ le rang de A est 2.

V. **Sujet A**. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer B^2, B^3 et B^4.*

On calcule $B^2 = BB$ en calculant les produits scalaires des lignes de B (facteur de gauche) avec des colonnes de B (facteur de droite). Rappeler que le produit scalaire est donné par $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. On trouve

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1,0,0)\cdot(1,-1,0) & (1,0,0)\cdot(0,1,-1) & (1,0,0)\cdot(0,0,1) \\ (-1,1,0)\cdot(1,-1,0) & (-1,1,0)\cdot(0,1,-1) & (-1,1,0)\cdot(0,0,1) \\ (0,-1,1)\cdot(1,-1,0) & (0,-1,1)\cdot(0,1,-1) & (0,-1,1)\cdot(0,0,1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Similairement on a

$$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^4 = B^3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alternativement utiliser les formules $B^3 = BB^2$ ou $B^4 = B^2B^2$ ou $B^4 = BB^3$.

Sujet B. *Soit* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* B^2, B^3 *et* B^4.

On a

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

VI. **Sujet A**. *Inverser si possible les matrices suivantes en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

D'abord on juxtapose C avec la matrice I_3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ensuite on échelonne la matrice 3×6. Comme le coefficient $(1, 1)$ est 0, on échange L_1 et L_2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Pour obtenir 0 comme coefficient $(3, 1)$ on fait $L_3 \to L_3 - L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Pour que tous les coefficients diagonaux de la matrice de gauche deviennent 1, on applique $L_3 \to -L_3$ à la matrice double :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Maintenant on soustrait des multiples des lignes d'en bas des lignes plus en haut pour faire annuler les coefficients de la matrice de gauche qui sont au dessus de la diagonale. On commence à droite et en bas avec les coefficients $(2, 3)$ et $(1, 3)$ en faisant $L_2 \to L_2 - L_3$ et $L_1 \to L_1 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Pour annuler le coefficient $(1,2)$ on fait $L_1 \to L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

La matrice de gauche est maintenant I_3, et la matrice de droite est C^{-1} :

$$\boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Si on applique le même algorithme à la matrice D, on obtient successivement

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 7L_1]{L_2 \to L_2 - 4L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Comme la matrice de gauche de la dernière matrice double contient une ligne nulle, on sait que D n'est pas de rang 3, et $\boxed{D \textbf{ n'est pas inversible}}$.

Sujet B. *Inverser si possible les matrices suivantes en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan.*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice C n'est pas inversible. On a $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

VII. **Sujet A**. *Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c le système linéaire suivant a-t-il une solution (x, y) ?*

$$\begin{cases} x + \ \ y = a, \\ x - 2y = b, \\ x + 4y = c \end{cases}$$

On échelonne le système. D'abord on élimine les termes en x de E_2 et E_3 en faisant $E_2 \to E_2 - E_1$ et $E_3 \to E_3 - E_1$:

$$\begin{cases} x + \ \ y = a, \\ \quad -3y = b - a, \\ \quad\ \ 3y = c - a. \end{cases}$$

On élimine le terme en y de E_3 (sans réintroduisant un terme en x) en faisant $E_3 \to E_3 + E_2$:

$$\begin{cases} x + \ \ y = a, \\ \quad -3y = b - a, \\ \quad\quad 0 = (c - a) + (b - a), \end{cases} \qquad \text{c-à-d} \qquad \begin{cases} x + \ \ y = a, \\ \quad -3y = b - a, \\ \quad\quad 0 = -2a + b + c. \end{cases}$$

Il y a deux possibilités : soit les valeurs de a, b, c satisfont à $-2a + b + c \neq 0$, et la dernière équation est impossible, et aucune (x, y) n'est une solution ; soit les valeurs de a, b, c satisfont à $-2a + b + c = 0$, et la dernière équation est $0 = 0$, et il y a une solution (x, y).

Conclusion : Le système a une solution (x, y) si et seulement si les valeurs de a, b, c satisfont à $-2a + b + c = 0$.

Sujet B. *Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c le système linéaire suivant a-t-il une solution (x, y) ?*

$$\begin{cases} x + \ \ y = a, \\ x + 2y = b, \\ x + 3y = c \end{cases}$$

Le système a une solution (x, y) si et seulement si a, b, c satisfont à $a - 2b + c = 0$.