L1 Info 2016–2017 : Algèbre 1 Feuille n° 1

I. Mettre sous la forme $x + yi$ avec x, y réels les nombres complexes suivants

$$(2-3i)^2, \qquad (2-3i)^3, \qquad \frac{1}{2-3i}, \qquad \frac{1}{(2-3i)(1+i)}, \qquad \frac{2+i}{(3+i)(2-i)}.$$

II. Déterminer sous la forme $x+yi$ avec x, y réels les nombres complexes z solutions des équations suivantes :

(a) $3z + 3 - 4i = 0$,

(b) $(7 + 2i)z + 5 - 8i = 0$,

(c) $(1 + i)\overline{z} - 5 + 4i = 0$.

III. (*Equations du second degré à coefficients réels*) Trouver les nombres réels ou complexes solutions des équations suivantes :

$$1a)\ x^2 = \frac{8}{81} \qquad 1b)\ x^2 = 0 \qquad 1c)\ x^2 = -19$$

$$2a)\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0 \qquad 2b)\ \left(\sqrt{5}x - 2\right)^2 = 0 \qquad 2c)\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{4} = 0$$

$$3a)\ 14x^2 - 9x + 1 = 9 \qquad 3b)\ 8x^2 + 12\sqrt{2}x + 9 = 0 \qquad 3c)\ x^2 - 2x + \frac{13}{9} = 0$$

IV. (*Equations du second degré à coefficients complexes*) Déterminer sous la forme $x+yi$ avec x, y réels les nombres complexes z solutions de l'équation $z^2 = c$ dans les cas :

$$c = 3 + 8i, \qquad c = -11 + 4i, \qquad c = 1 - i.$$

(Une méthode consiste à remarquer que $|z|^2 = x^2 + y^2 = |c|$ et $x^2 - y^2 = \operatorname{Re} c$ et à déterminer les copules (x^2, y^2) puis les couple (x, y) en tenant compte du signe de $2xy = \operatorname{Im} c$).

V. (*Equations du second degré à coefficients complexes*) Déterminer sous la forme $x + yi$ avec x, y réels les nombres complexes z solutions des équations :

(a) $z^2 + (2 + i)z + i = 0$,

(b) $z^2 - (1 + 2i)z + 2 = 0$,

(c) $4z^2 + (2 - 6i)z - 8 - 6i = 0$.

Déduire de (a) les solutions complexes de l'équation :

$$z^2 + (2 - i)z + i = 0.$$

VI. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$-1, \qquad 2-2i, \qquad -3\sqrt{3}+3i, \qquad (1-i)(\sqrt{3}+i), \qquad \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$$

En déduire par exemple le module et l'argument des complexes z tels que

$$z^5 = 2-2i, \qquad\qquad z^3 = (1-i)(\sqrt{3}+i).$$

VII. (*Similitude directe*) Déterminer le point fixe de chaque similitude directe ci-dessous, et l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie dont elle est composée :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: \mathbf{C} \to \mathbf{C}: & z &\mapsto \phi_1(z) = 2iz + 1 - 3i \\
\phi_2 &: \mathbf{C} \to \mathbf{C}: & z &\mapsto \phi_2(z) = (1-i)z + 1 - 3i \\
\phi_3 &: \mathbf{C} \to \mathbf{C}: & z &\mapsto \phi_3(z) = (1+i\sqrt{3})z + 1 - 3i \\
\phi_4 &: \mathbf{C} \to \mathbf{C}: & z &\mapsto \phi_4(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)z + 2 + i
\end{aligned}$$

VIII. (*Similitude directe*) Considérons les similitudes directes :

$$\begin{aligned}
\phi &: \mathbf{C} \to \mathbf{C}: & z &\mapsto \phi(z) = (1+i)z + 2 + 3i \\
\psi &: \mathbf{C} \to \mathbf{C}: & z &\mapsto \psi(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)z + 1 + i
\end{aligned}$$

(a) Déterminer le point fixe et l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie composant la similitude directe.

(b) Préciser l'application composée $\phi \circ \psi$. Constater qu'il s'agit d'une similitude directe. Déterminer son point fixe, et l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

(c) Même question pour $\psi \circ \phi$.

(d) Nous savons que ϕ et ψ sont bijectives. Préciser ϕ^{-1} et ψ^{-1}.

(e) Constater que ϕ^{-1} et ψ^{-1} sont des similitudes directes. Préciser avec et sans calculs leurs points fixes et leurs angles et rapports.

IX. Donner une expression de $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ à l'aide de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Pour cela, on admettra que pour tout entier relatif n et tout réel θ on a $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$. Même question avec $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$.

X. Soit θ un nombre réel et $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Montrer que pour tout entier n on a :

$$2\cos n\theta = z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad\qquad 2i\sin n\theta = z^n - \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

En développant $(z+\frac{1}{z})^5$ et $(z-\frac{1}{z})^5$, donner une expression de $\cos^5\theta$ et $\sin^5\theta$ à l'aide de $\cos 5\theta$, $\sin 5\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$.