

I. Résolvez les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2y - z = 4, \\ 3z = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 3b - 6c = 20, \\ b + 4c = 4, \\ 2c = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2y - z = t^2, \\ z = e^{-t}. \end{cases}$$

II. Résolvez les systèmes suivants. Identifiez chaque fois les paramètres indépendants dont dépend la solution.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 12, \\ y + z = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z + 3w = 2, \\ y - z + 2w = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + 2b + c + d = 5e^t, \\ b + 2c - 4d = 0, \\ 2d = e^t. \end{cases}$$

III. Réduisez les systèmes suivants en forme échelonnée, et **résolvez-les**. Identifiez chaque fois les paramètres indépendants dont dépend la solution.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 4, \\ x - y = 10. \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 6y + 4z = 4, \\ 2x - y + z = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 3y = 7, \\ 3x + 5y = 11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2x - y = 4, \\ x - y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 2z + 2w = 2, \\ 2x + 2y - z - w = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y + 6z = -1, \\ 2x - 5y + 10z = 0, \\ 3x - 8y + 17z = 1. \end{cases}$$

IV. Mettez les matrices (augmentées) suivantes en forme échelonnée en ligne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,4 & -0,3 & 130 \\ -0,2 & 0,88 & -0,14 & 74 \\ -0,5 & -0,2 & 0,95 & 95 \end{array} \right).$$

V. Ecrivez les matrices augmentées qui correspondent aux systèmes suivants. Puis réduisez les matrices en forme échelonnée en ligne, et finalement résolvez les systèmes.

$$\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 1, \\ 6x + 3y - 5z = 0, \\ 2x + y + 2z = 9. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y - z = 2, \\ x + y + z = -2, \\ 2x - 4y + 3z = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

VI. (a) Pour quelles valeurs du paramètre a le système d'équations suivant a-t-il une solution ?

$$\begin{cases} 6x + y = 7, \\ 3x + y = 4, \\ -6x - 2y = a. \end{cases}$$

(b) Déterminer pour quelles valeurs du paramètre k le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - kx_2 = 1, \end{cases}$$

n'a pas de solution, a une solution ou a plus d'une solution.

VII. Quels sont les rangs des systèmes linéaires suivants? De combien de paramètres dépendent les solutions de ces systèmes?

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0, \\ -x + 2y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0, \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 6y - 7z + 3t = 0, \\ x + 9y - 6z + 4t = 0, \\ x + 3y - 3z + 4t = 0. \end{cases}$$

VIII. Calculer le rang de chaque matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 15 & -13 & 11 & 16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

IX. Dans les systèmes et matrices suivants, certains coefficients dépendent d'un paramètre. Quels sont les rangs de ces systèmes et matrices, en fonction des valeurs des paramètres?

$$\begin{cases} x + ry = 0, \\ 2x + 4y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y + 4z = 0, \\ 2x + 3y + sz = 0. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

X. Que pouvez-vous dire sur le nombre de solutions (ou le nombre de paramètres indépendants dont dépendent les solutions) des systèmes suivants

(a) quand le membre de droite est nul : $(a, b) = (0, 0)$ ou $(a, b, c) = (0, 0, 0)$?

(b) pour un membre de droite quelconque (a, b) ou (a, b, c) ?

$$\begin{cases} x + 4y = a, \\ 2x + y = b. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y + 3z = a, \\ 2x + y = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = a, \\ x + 4y = b, \\ 3y = c. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y + 3z = a, \\ 2x + y = b, \\ x + y + z = c. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4y + 3z = a, \\ 2x + y = b, \\ 7y + 6z = c. \end{cases}$$

XI. Ajoutez un membre de droite (a, b) ou (a, b, c) aux systèmes de l'exercice VII, et répondez aux questions de l'exercice X.