L1 Info 2016–2017 : Algèbre 1 — Feuille n° 3

I. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculez les matrices suivantes quand elles sont définies :

$$\begin{array}{cccccc} A+B, & A-D, & 3B, & DC, & B^T, & A^TC^T, \\ C+D, & B-A, & AB, & CE, & -D, & (CE)^T, \\ B+C, & D-C, & CA, & EC, & (CA)^T, & E^TC^T. \end{array}$$

(b) Vérifier qu'on a $(DA)^T = A^TD^T$.

(c) Vérifier qu'on a $CD \neq DC$.

II. Calculer le produit

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quel est le produit des deux matrices dans l'autre sens ?

III. Montrer que si AB est définie, alors B^TA^T est définie, mais A^TB^T peut ne pas être défini.

IV. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'on a $I_2A = A$ et AI_3.

V. (a) Soit $E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. Caculer EF et FE. Que voyez-vous ?

(b) Calculer $E^2 = EE$, $E^3 = EEE$ et E^4. Qu'est-ce que E^n pour n entier ?

VI. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer U^2, U^3, U^4. Qu'est-ce que U^n pour n entier ?

VII. Que peut-on dire concernant une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et symétrique ?

VIII. Pour quelles valeurs des paramètres x, y les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ commutent-elles ? (On dit que B et C **commutent** si on a $BC = CB$.)