L1 Info 2016–2017 : Algèbre 1 — Feuille n° 4

I. A quelles opérations élémentaires (sur les lignes) correspondent les matrices élémentaires suivantes ? Quelles sont les tailles desmatrices sur lesquelles les opérations s'appliquent ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Décrire trois opérations élémentaires sur les lignes de A qui transforment A en une matrice échelonnée en lignes.

(b) Trouver trois matrices élémentaires E_1, E_2, E_3 telles que $U = E_3E_2E_1A$ soit en forme échelonnée en lignes et triangulaire supérieure. Vérifier la triangularité de $U = E_3E_2E_1A$ en faisant le calcul matriciel.

(c) La matrice $E_3E_2E_1$ est-elle triangulaire ? Supérieure ou inférieure ?

III. (a) Soit

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Décrire l'opération (non élémentaire) sur les de A qui a le même effet que le remplacement de A par FA.

(b) *Idem* pour

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner une matrice F telle que FB soit la matrice obtenue quand on utilise le 2 entouré pour faire annuler les coefficients au dessous de lui. Quelle relation y a-t-il entre F et les matrices élémentaires.

IV. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer en utilisant simplement le produit matriciel que si on a $\det A = ad - bc \neq 0$, alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(b) Utiliser la formule du (a) pour calculer les inverses de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

V. (a) Expliquer pourquoi ***on ne peut pas trouver*** des matrices vérifiant les équations matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Formuler un argument expliquant pourquoi une matrice avec une ligne nulle ne peut être inversible.

(c) *Idem* pour une matrice avec une colonne nulle.

VI. Appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan aux matrices suivantes, soit pour inverser la matrice, soit pour montrer qu'elle n'est pas inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 21 & 8 & 17 \\ 4 & 12 & -4 & 13 \\ 0 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix}.$$

VII. Sous quelles conditiions les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad D_2 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & t \end{pmatrix}$$

VIII. (a) Ecrire chaque système linéaire comme une équation matricielle $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 3x + 5y = b_1 \\ x + 2y = b_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x + 8y = b_1, \\ x + 3y = b_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 5y = b_1 \\ 5x + 2y = b_2. \end{cases}$$

Ensuite inverser A afin de trouver les solutions $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ pour les membres de droite $(b_1, b_2) = (5, 3)$, $(2, 8)$, $(100, 200)$ et $(6, 6)$.

(b) *Idem* pour les systèmes linéaires

$$\begin{cases} 2x + y = c_1, \\ 6x + 2y + 6z = c_2, \\ -4x - 3y + 9z = c_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4y = c_1, \\ 4x + 6y + 3z = c_2, \\ -6x - 10y = c_3. \end{cases}$$

et les membres de droite $(c_1, c_2, c_3) = (4, 20, 3)$, $(2, 1, 6)$ et $(1, 1, 1)$.

IX. Soit A une matrice $m \times n$. Compléter les phrases suivantes :

(a) Pour tout membre de droit $\boldsymbol{b}$, l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a au moins une solution si rg $A =$ ______.

(b) Pour tout membre de droit $\boldsymbol{b}$, l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a une solution unique si et seulement si __________________________________. (Donner autant de réponses que possible.)