L1 Info 2016–2017 : Algèbre 1 Feuille n° 5

Rappels.

- Un *sous-espace vectoriel* de $\mathbf{R}^n$ est un sous-ensemble E vérifiant les trois propriétés suivantes : (i) $\mathbf{0}$ est dans E, (ii) pour tout $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ on a $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in E$, et (iii) pour tout $\mathbf{v} \in E$ et tout $r \in \mathbf{R}$ on a $r\mathbf{v} \in E$. Par exemple $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Plus généralement toute droite et plan dans $\mathbf{R}^3$ *qui passe par l'origine* $(0, 0, 0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
- Une *combinaison linéaire* de vecteurs $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_m}$ est un vecteur de la forme $r_1\mathbf{v_1} + r_2\mathbf{v_2} + \cdots + r_m\mathbf{v_m}$ avec $r_1, r_2, \dots, r_m$ des réels.
  Par exemple parmi les combinaisons linéaires de $(1, 1)$ et $(2, 3)$ sont $2(1, 1) - 3(2, 3) = (-4, -7)$ et $r(1, 1) + s(2, 3) = (r + 2s, r + 3s)$.
- Le *sous-espace vectoriel engendré par une famille* $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_m}$ de $\mathbf{R}^n$ est

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vect}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_m})\\ &\qquad = \{\text{tous les vecteurs de } \mathbf{R}^n \text{ qui sont combinaisons linéaires de } \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_m}\}.\end{aligned}$$

  Par exemple le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ est le plan $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, mais le sous-espace vectoriel engendré par $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$ est tout $\mathbf{R}^3$.

I. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$?

$$S_1 = \{(x, y) \mid x = 0\}, \quad S_2 = \{(x, y) \mid x = 1\}, \quad S_3 = \{(x, y) \mid 3x - 4y = 0\},$$
$$S_4 = \{(x, y) \mid x^2 = y^2\}, \quad S_5 = \{(0, 1)\}, \quad S_6 = \{(x, y) \mid x + y = 0 \text{ et } x - y = 0\}.$$

II. Soit $W = \{(x, y) \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ l'ensemble de points dans $\mathbf{R}^2$ situés sur l'un ou l'autre des axes.. Montrer que W est stable sous la multiplication par des scalaires, mais n'est pourtant pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$.

III. (a) Soit $V_1 = \{(a, b, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$ l'ensemble de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ dont les deuxième et troisième coordonnées sont égales. Vérifier que V_1 vérifie les trois conditions caractérisant un sous-espace vectoriel.

(b) Trouver 3 vecteurs $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3} \in V_1$ tels que tout membre de V_1 soit une conbinaison linéaire de ces 3 vecteurs.

(c) Répondez aux questions (a) et (b) pour $V_2 = \{(a, b, c, d) \mid a + b + c - d = 0\} \subset \mathbf{R}^4$,

IV. Montrer que $\{\mathbf{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

V. (a) Ecrire $(2, 2)$ comme une combinaison linéaire de $(1, 2)$ et $(1, 4)$.

(b) Ecrire $(1, 2, 3)$ comme une combinaison linéaire de $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

VI. (a) Vérifier que tout $\boldsymbol{v} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ est une combinaison linéaire de $\boldsymbol{e_1} = (1, 0)$ et $\boldsymbol{e_2} = (0, 1)$. L'écriture de $\boldsymbol{v}$ en tant que combinaison linéaire de $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ est-elle unique ?

(b) *Idem* avec $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ remplacés par $\boldsymbol{w_1} = (2, -1)$ et $\boldsymbol{w_2} = (1, -2)$.

(c) *Idem* avec $\boldsymbol{e_1}$ et $\boldsymbol{e_2}$ remplacés par $\boldsymbol{u_1} = (1, 1)$, $\boldsymbol{u_2} = (1, 2)$ et $\boldsymbol{u_3} = (1, 3)$.

VII. (a) Est-ce que $(1, 2)$ et $(2, 4)$ engendrent $\mathbf{R}^2$? Sinon, quelle est l'équation (ou les équations) du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ qu'ils engendrent ?

(b) Est-ce que $(1,2,3)$, $(4,5,12)$ et $(0,8,0)$ engendrent $\mathbf{R}^3$? Sinon, quelle est l'équation (ou les équations) du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ qu'ils engendrent ? item Est-ce que $(1,2,3)$, $(4,5,12)$ et $(0,0,8)$ engendrent $\mathbf{R}^3$? Sinon, quelle est l'équation (ou les équations) du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ qu'ils engendrent ?

VIII. (a) Le vecteur $(1,1,1)$ est-il une combinaison linéaire de $(1,3,4)$ et $(2,5,7)$?

(b) Le vecteur $(1,1,1)$ est-il une combinaison linéaire de $(1,3,4)$, $(2,5,7)$ et $(0,0,1)$?

IX. Déterminer les a et b tels que $(a,1,1,b)$ soit une combinaison linéaire de $\boldsymbol{v_1} = (1,2,3,4)$ et $\boldsymbol{v_2} = (1,-2,3,-4)$.
Idem pour $(a,1,b,1)$.

X. (a) Exhiber $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme des combinaison linéaires explicites $r\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que toute combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est aussi une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

(c) Montrer que toute combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ est aussi une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

XI. Expliciter les expressions comme $f(x,y,z)$ qui rendent vraies les phrases suivantes.
Le vecteur $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ est une combinaison linéaire de $(1,4,5)$ et $(2,3,4)$ si et seulement si on a $f(x,y,z) = 0$.
Le vecteur $(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4$ est une combinaison linéaire de $(1,4,5,0)$ et $(2,3,4,5)$ si et seulement si on a $g(x,y,z,w) = 0$ et $h(x,y,z,w) = 0$.