I. Lesquels des familles suivantes de vecteurs sont libres ?

$$(3,1),(1,3). \qquad (3,2),(-6,-4).$$
$$(1,-1,0),(1,0,-1). \qquad (1,-1,0),(1,0,-1),(0,1,-1).$$

II. Pour quelles valeurs des paramètres les familles suivantes sont-elles libres ?

$$(1,t),(t,1) \qquad (1,0,s),(1,1,s),(s,0,1).$$

III. Déterminer toutes les sous-familles libres maximales de $(1,1,0),(4,1,4),(2,-1,4)$.

IV. (a) Trouver toutes les relations de dépendance linéaire $r\boldsymbol{v}_1+s\boldsymbol{v}_2+t\boldsymbol{v}_3+u\boldsymbol{v}_4=0$ entre $\boldsymbol{v}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2=(1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_3=(1,0,-1)$ et $\boldsymbol{v}_4=(1,3,4)$.

(b) Extraire une sous-famille libre maximale de $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$.

V. Montrer que deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont linéairement dépendants si et seulement si l'un est un multiple de l'autre.

VI. Lesquelles des familles suivantes engendrent-elles $\mathbf{R}^3$? Extraire une base de $\mathbf{R}^3$ de chaque famille génératrice.

$$(1,1,1),(1,2,3),(1,3,2),(0,1,-1), \qquad (1,1,1),(1,3,3),(1,2,2),(1,0,-1).$$

VII. Lesquelles des familles suivantes sont une base de $\mathbf{R}^3$?

(a) $\boldsymbol{v}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(0,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3=(1,1,1)$.

(b) $\boldsymbol{v}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(0,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3=(1,0,1)$, $\boldsymbol{v}_4=(1,1,1)$.

(c) $\boldsymbol{v}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(0,1,1)$.

(d) $\boldsymbol{v}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2=(3,0,-1)$, $\boldsymbol{v}_3=(-1,1,-1)$.

(e) $\boldsymbol{v}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2=(3,0,-1)$, $\boldsymbol{v}_3=(1,8,13)$.

(f) $\boldsymbol{v}_1=(1,2,-3)$, $\boldsymbol{v}_2=(1,0,-1)$, $\boldsymbol{v}_3=(1,10,-11)$.

VIII. (a) Donner une base du sous-espace $E\subset\mathbf{R}^4$ de solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x+y+z+w=0,\\ x-y+z-3w=0,\\ \phantom{x+{}}y+\phantom{z+{}}2w=0.\end{cases}$$

Quelle est la dimension de E ?

(b) *Idem* pour le sous-espace de solutions de

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=0,\\ x+4y+9z+16w=0.\end{cases}$$

IX. Compléter les familles libres suivantes en des bases de $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$.

(a) $\boldsymbol{v}_1=(3,4)$.

(b) $\boldsymbol{v}_1=(1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2=(2,0,-1)$.

(c) $\boldsymbol{v}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2=(1,-1,1)$.

(d) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,1,-1)$.

(e) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,3,4)$.

X. (a) Quelles sont les coordonnées du vecteur $(7,8)$ dans la base $(1,1)$, $(1,2)$ de $\mathbf{R}^2$?

(b) Quelles sont les coordonnées du vecteur (a,b) dans la base $(1,1)$, $(1,2)$ de $\mathbf{R}^2$?

(c) Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1,0,-1)$ dans la base $(1,1,1)$, $(1,2,3)$, $(1,4,9)$ de $\mathbf{R}^3$?

(d) Quelles sont les coordonnées du vecteur (a,b,c) dans la base $(1,1,1)$, $(1,2,3)$, $(1,4,9)$ de $\mathbf{R}^3$?

XI. (a) Soit $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une ***application linéaire*** avec $g(1,0) = (2,3)$ et $g(0,1) = (-1,7)$. Donner une formule pour $g(x,y)$.

(b) On passe à la notation de vecteurs colonnes. Trouver une matrice A telle qu'on ait $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2_{\mathrm{col}}$. Quelle relation y a-t-il entre les coefficients des vecteurs $(2,3)$, $(1,-7)$ et les coefficients de A ?

(c) Soit $h\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ une application linéaire avec $h(1,0,0) = (1,1)$, $h(0,1,0) = (0,1)$ et $h(0,0,1) = (3,2)$. Répondre aux mêmes questions que pour g ci-dessus.

XII. (a) Trouver une base du sous-espace engendré par les colonnes de chacune des matrices suivantes. Quelles sont les dimensions de ces espaces ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Trouver une base du noyau de chaque matrice de (a). Quelles sont les dimensions de ces noyaux ?

XIII. Faire les calculs suivants pour chacune des applications linéaires $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

(i) Trouver la matrice A telle qu'on ait $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$.

(ii) Echelonner A.

(iii) Trouver une base du **noyau** de A.
Rappel : $\ker f = \{\text{solutions } \boldsymbol{v} \text{ du système linéaire } A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\} \subset \mathbf{R}^n$.

(iv) Trouver une base de l'**image** de A.
Rappel : $\operatorname{im} f \subset \mathbf{R}^m$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^m$ engendré par les colonnes de A. Une sous-famille libre maximale des colonnes de A donne une base de $\operatorname{im} f$.

(v) Quelles sont les dimensions du noyau de f et de l'image de f ? Que vaut la somme $\dim\ker f + \dim\operatorname{im} f$?

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y, -x-y), \\ f(x,y,z) &= (x+y+z, x+y+z, x+y+z), \\ f(x,y,z,w) &= (4x+y+w, -x+5z+w, x+y+15z+4w), \\ f(x,y,z) &= (4x-y+z, x+z, 5y+15z, x+y+4z). \end{aligned}$$