M1 MPA : Algèbre et Arithmétique 2016–2017
Devoir Maison n^o 1

I. Soit A un anneau commutatif.

(a) Montrer que si $x \in A$ est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible.

(b) Montrer que si $b \in A$ est inversible et $x \in A$ est nilpotent, alors $b + x$ est inversible.

(c) Dans l'anneau de polynômes $A[T]$ montrer que $f = b_0 + b_1 T + \cdots + b_n T^n$ est inversible si et seulement si b_0 est inversible dans A et $b_1, \ldots, b_n$ sont nilpotents.
(Indication : Si f est inversible dans $A[T]$, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'image de f dans $(A/\mathfrak{p})[T]$ doit être inversible. Quels sont les inversibles de $(A/\mathfrak{p})[T]$?)

II. Soit A un anneau commutatif, et soit $X = \{\text{tous les idéaux premiers de } A\}$. Pour un idéal I de A, soit $V(I) = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \supset I\}$. Alors on dit qu'un sous-ensemble $Z \subset X$ est un *fermé* de la *topologie de Zariski* de X s'il existe un idéal I de A avec $Z = V(I)$.

(a) Si on a deux idéaux $I \subset J$, quelle relation y a-t-il entre $V(I)$ et $V(J)$?

(b) Montrer que $\varnothing$ et X sont des fermés de X.

(c) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, et $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux. Montrer l'équivalence de (i) $\mathfrak{p}$ contient au moins un des idéaux $I_1, \ldots, I_n$, (ii) $\mathfrak{p}$ contient $\bigcap_{k=1}^n I_k$, et (iii) $\mathfrak{p}$ contient $I_1 I_2 \cdots I_n$.

(d) En déduire qu'une réunion finie de fermés de X est fermé.

(e) Montrer qu'une intersection (finie ou infinie) de fermés de X est fermé.
(Les questions (b), (d) et (e) sont les axiomes vérifiés par les fermés d'un espace topologique.)

(f) Pour tout idéal I posons $\sqrt{I} = \{f \in A \mid \text{il existe un entier } n \geq 1 \text{ avec } f^n \in I\}$. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal.

(g) On dit qu'un idéal J est *radical* si on a $J = \sqrt{J}$.
Montrer que pour tout idéal I de A, l'idéal $\sqrt{I}$ est radical.

(h) Montrer que pour tout idéal I de A on a $\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \sqrt{I}$.

(i) En déduire une bijection entre les fermés de X et les idéaux radicaux de A.

III. Soit A un anneau intègre.

(a) Soit $a, b, x, y \in A$ avec $ab = xy$. Montrer que si on a $a \mid x$, alors on a $y \mid b$. (Rappel : $a \mid x$ signifie que a divise x.)

(b) Soit $a, b \in A$ deux éléments qui ont un ppcm m. Montrer que les idéaux qu'ils engendrent vérifient $(m) = (a) \cap (b)$.

(c) Soit $a, b \in A$ deux éléments qui ont un ppcm. Montrer qu'ils ont aussi un pgcd, et qu'on a

$$\operatorname{pgcd}(a, b) \times \operatorname{ppcm}(a, b) = ab.$$

(d) Donner un exemple d'un anneau spécifique R et d'éléments spécifiques $r, s \in R$ qui ont un pgcd mais n'ont pas de ppcm.

(e) Supposons que (i) A est intègre, (ii) tout élément non nul de A a une factorisation en un produit d'irréductibles, et (iii) tout couple d'éléments de A ont un ppcm. Montrer que A est factoriel.

(Indication : Supposer p irréductible et $p \mid ab$. Ecrire $\operatorname{ppcm}(p, a) = ax$ et étudier x.)

IV. Soit A un anneau intègre, et $K = \operatorname{Frac}(A)$ son corps de fractions. On dit que A est *intégralement clos dans son corps de fractions* ou *normal* si tout $z \in K$ vérifiant une équation de la forme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ avec $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in A$ est dans A.

(a) Montrer que tout anneau factoriel est normal.

(b) Montrer que les anneaux $\mathbf{C}[T^2, T^3]$ et $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ ne sont pas normaux.