M1 MPA : Algèbre et Arithmétique 2016–2017
Feuille d'exercices n° 1

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires, et tous les morphismes d'anneaux sont des morphismes d'anneaux unitaires.

I. Soit R un anneau. Montrer que :

(a) Pour tout $r \in R$ on a $r0 = 0$.

(b) Pour tout $r, s \in R$ on a $(-r)s = -rs$ et $r(-s) = -rs$.

(c) Si $1 = 0$ dans R alors $R = \{0\}$. (On dit que R est *l'anneau nul.*)

(d) Pour tout $r, s \in R$ et tout $n \in \mathbf{N}$ on a $(r+s)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} r^k s^{n-k}$.

II. (a) Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$. Est-il intègre ? Est-il un corps ?

(b) Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$. Est-il intègre ? Est-il un corps ?

(c) Montrer que $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbf{C}$. Est-il intègre ? Est-il un corps ? Quels sont les éléments de $\mathbf{Z}[i]$ qui sont inversibles pour la multiplication ?

III. Montrer que $\mathbf{Z}[\frac{1}{10}] = \{\frac{x}{10^n} \mid x \in \mathbf{Z},\, n \in \mathbf{N}\}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$. Quels sont les éléments de $\mathbf{Z}[\frac{1}{10}]$ qui sont inversibles pour la multiplication ? L'anneau $\mathbf{Z}[\frac{1}{10}]$ contient-il des diviseurs de zéro ? Est-il intègre ? Est-il un corps ?

IV. (*L'anneau de Boole*) Soit B un anneau dont tous les éléments sont idempotents, c'est à dire qu'on a $b^2 = b$ pour tout $b \in B$.

(a) Montrer que pour tout $b \in B$ on a $2b = 0$.

(b) Montrer que pour tout $a, b \in B$ on a $ab(a - b) = 0$.

(c) Que peut-on dire si B est intègre ?

V. (*Produit d'anneaux*) Si R et S sont des anneaux, l'ensemble $R \times S = \{(r, s) \mid r \in R,\, s \in S\}$ peut être muni d'une structure d'anneau avec les opérations suivantes :

$$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s'), \qquad (r, s) \cdot (r', s') = (rr', ss').$$

(a) Vérifier que ces deux opérations définissent une structure d'anneau sur $R \times S$.

(b) Sous quelle condition $R \times S$ est-il un anneau intègre ? (Indication : calculer le produit $(1,0) \cdot (0,1)$.)

(c) Montrer que les deux projections

$$\begin{aligned} p_1 \colon R \times S &\to R \\ (r,s) &\mapsto r \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} p_2 \colon R \times S &\to S \\ (r,s) &\mapsto s \end{aligned}$$

sont des morphismes surjectifs d'anneaux. Montrer que l'appilcation $i \colon R \to R \times S$ envoyant $r \mapsto (r,0)$ n'est pas un morphisme d'anneaux (si S est non nul).

VI. (a) Pour $a \in \mathbf{Z}$ notons ses classes dans $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ par $\overline{a}$, $\widehat{a}$ et $\dot{a}$ respectivement. Montrer que

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} &\to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \\ \overline{a} &\mapsto (\widehat{a}, \dot{a}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Calculer $\varphi^{-1}(\widehat{1}, \dot{1})$, $\varphi^{-1}(\widehat{1}, \dot{0})$ et $\varphi^{-1}(\widehat{0}, \dot{1})$.

(b) Montrer que $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ne sont pas isomorphes comme anneaux.

(c) Montrer l'existence d'un corps $\mathbf{F}_4$ à 4 éléments en donnant les tables des opérations et en vérifiant les axiomes.

VII. (a) Déterminer les morphismes d'anneaux $\varphi \colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ et $\psi \colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$.

(b) Déterminer les morphismes d'anneaux $\rho \colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$.

(c) Déterminer les morphismes d'anneaux $g \colon \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

(d) Soit $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un morphisme d'anneaux. Montrer que $x \geq 0$ implique $f(x) \geq 0$ (considérer les carrés). En déduire que f est croissant, puis qu'on a $f = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$.