**M1 MPA : Algèbre et Arithmétique 2016–2017**
Feuille d'exercices n° 2

**I**. Déterminer si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux. Démontrer chaque énoncé vrai, et donner un contre-exemple à chaque énoncé faux (et/ou corriger l'énoncé).

Soit $f\colon R \to S$ un morphisme d'anneaux commutatifs.

(a) Si $I$ est un idéal de $R$, alors $f(I)$ est un idéal de $S$.

(b) Si $J$ est un idéal de $S$, alors $f^{-1}(J) = \{x \in R \mid f(x) \in J\}$ est un idéal de $R$.

(c) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $S$, alors $f^{-1}(\mathfrak{p})$ est un idéal premier de $R$.

(d) Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $S$, alors $f^{-1}(\mathfrak{m})$ est un idéal maximal de $S$.

(e) L'image $f(R)$ est un idéal de $S$.

**II**. (a) Soit $R$ un anneau fini. Montrer que tout élément $x \in R$ est soit inversible soit un diviseur de zéro.

(b) Soit $K$ un corps, et $A$ une $K$-algèbre commutative de dimension finie (en tant que $K$-espace vectoriel). Montrer que tout élément $a \in A$ est soit inversible soit un diviseur de zéro.

**III**. Soit $R$ un anneau. Un élément $r \in R$ est dit *nilpotent* s'il existe un entier $n \geq 1$ avec $r^n = 0$. Le *nilradical* de $R$ est

$$\mathrm{nil}(R) = \{r \in R \mid r \text{ est nilpotent}\}.$$

(a) Supposons $R$ commutatif. Montrer que $\mathrm{nil}(R)$ est un idéal de $R$.

(b) Montrer qu'on a $\mathrm{nil}(R) \subset \bigcap\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ est un idéal premier de } R\}$.

(c) Compléter la démonstration de l'égalité

$$\mathrm{nil}(R) = \bigcap\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ est un idéal premier de } R\}$$

dans la façon suivante. Pour $x \in R$ poser

$$\mathfrak{I}_x = \{\text{idéaux } I \text{ de } R \text{ avec } x^n \notin I \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\}.$$

Montrer que si $x$ est **non nilpotent**, alors $\mathfrak{I}_x$ est non vide, et utiliser le lemme de Zorn pour obtenir un membre maximal $\mathfrak{p}_x$ de $\mathfrak{I}_x$. Démontrer que $\mathfrak{p}_x$ est un idéal premier avec $x \notin \mathfrak{p}_x$.

(d) (*Non commutatif*) Trouver deux matrices nilpotentes $N_1, N_2 \in M_2(\mathbf{R})$ avec $N_1 + N_2$ non nilpotente.

**IV**. Dans l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ considérons l'idéal $I = (2, X)$.

(a) Montrer que $I$ n'est pas un idéal principal.

(b) Donner des systèmes de générateurs des idéaux $I^2 = II$ et $I^3$.

**V**. (a) Dans l'anneau $\mathbf{Z}/36\mathbf{Z}$ quels sont les éléments inversibles ? nilpotents ? diviseurs de zéro ? (Utiliser la factorisation en premiers $36 = 2^2 3^2$).

(b) Mêmes questions pour $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $n \geq 1$ un entier quelconque.

**VI**. (a) Soit $R \neq \{0\}$ un anneau commutatif. Montrer que $R$ est la réunion disjointe de $R^\times$ et de $\bigcup\{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \text{ est un idéal maximal de } R\}$.

(b) Un anneau commutatif $R \neq \{0\}$ est dit *local* s'il contient un seul idéal maximal. Démontrer que $R$ est local si et seulement si $R \setminus R^\times$ est un idéal de $R$.

(c) Soit $K$ un corps. L'anneau de polynômes $K[T]$ ou l'anneau de séries formelles $K[[T]]$ sont-ils locaux ?

(d) Soit $\mathbf{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbf{Q} \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ avec } b \text{ impair}\}$. Quels sont les inversibles de $\mathbf{Z}_{(2)}$ ? L'anneau $\mathbf{Z}_{(2)}$ est-il local ?

(e) Soit $A$ un anneau intègre et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $A$. Soit $A_\mathfrak{p} = \{\frac{a}{b} \in \operatorname{Frac}(A) \mid a, b \in A \text{ avec } b \notin \mathfrak{p}\}$. Quels sont les inversibles de $A_\mathfrak{p}$ ? L'anneau $A_\mathfrak{p}$ est-il local ?

**VII**. (*Théorème chinois généralisé*) Deux idéaux $I, J$ d'un anneau $R$ sont *étrangers* si on a $I + J = R$. (Rappel : Ceci est équivalent à avoir $1_R \in I + J$).

(a) Démontrer que si $I$ et $J$ sont des idéaux étrangers, alors on a $IJ = I \cap J$.

(b) Pour $r \in R$ notons ses classes dans $R/IJ$, $R/I$ et $R/J$ par $\overline{r}$, $\widehat{r}$ et $\dot{r}$ respectivement. Montrer que si $I$ et $J$ sont étrangers, alors

$$\begin{aligned} \varphi\colon R/IJ &\to R/I \times R/J \\ \overline{r} &\mapsto (\widehat{r}, \dot{r}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux. Calculer $\varphi^{-1}(\widehat{1}, \dot{1})$, $\varphi^{-1}(\widehat{1}, \dot{0})$ et $\varphi^{-1}(\widehat{0}, \dot{1})$. Pour $r, s \in R$ calculer $\varphi^{-1}(\widehat{r}, \dot{s})$.