

# M1 MPA : Algèbre et Arithmétique 2016–2017

Feuille d'exercices n° 5

I. Réduire sur  $\mathbf{Z}$  les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(C'est-à-dire trouver des matrices qui sont équivalentes sur  $\mathbf{Z}$  mais de la forme  $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , où  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$  et  $d_1, \dots, d_r$  sont non nuls et vérifiant  $d_1 | d_2 | \dots | d_r$ .)

- II. (a) Soit  $G$  un groupe abélien de type fini. Montrer que si  $G$  n'a pas d'éléments d'ordre fini autres que 0, alors  $G$  est un  $\mathbf{Z}$ -module libre.
- (b) Donner les facteurs invariants du groupe  $H = \mathbf{Z}/72\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/84\mathbf{Z}$ . Le groupe  $H$  est-il isomorphe à  $\mathbf{Z}/36\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/168\mathbf{Z}$  ?
- (c) Classifier à isomorphisme près les groupes abéliens d'ordre 30, 100 et 81.
- (d) Soit  $N$  le sous-module de  $\mathbf{Z}^3$  engendré par  $(3, -12, 10)$ ,  $(-12, 64, -60)$  et  $(10, -60, 60)$ . Montrer qu'on a  $\mathbf{Z}^3/N \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/20\mathbf{Z}$ .
- (e) Quels sont les facteurs invariants du  $\mathbf{Z}$ -module suivant ?

$$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^2 \oplus \mathbf{Z}/27\mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 \oplus \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}.$$

- III. (a) Soit  $G$  le groupe abélien engendré par deux éléments  $x, y$  satisfaisant à la relation  $3x + 4y = 0$ . Ecrire  $G$  comme produit de groupes cycliques.
- (b) Même question pour  $G$  engendré par  $x, y$  satisfaisant à la relation  $3x - 6y = 0$ .
- (c) Même question pour  $G$  engendré par  $x, y, z$  satisfaisant aux relations  $2x + 4y = 0$  et  $2x + 2y + z = 0$ .

- IV. (a) Quels sont les facteurs invariants de  $\frac{\mathbf{Z}[i]}{(6 + 8i)\mathbf{Z}[i]}$  et de  $\frac{\mathbf{Z}[i]}{(10 + 15i)\mathbf{Z}[i]}$  en tant que  $\mathbf{Z}$ -modules ?
- (b) Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$ , et soit  $\delta = \text{pgcd}(a, b, c, d)$ . Quels sont les facteurs invariants de  $A$  ?
- (c) Soit  $a, b \in \mathbf{Z}$ . Quels sont les facteurs invariants de  $\frac{\mathbf{Z}[i]}{(a + bi)\mathbf{Z}[i]}$  en tant que  $\mathbf{Z}$ -module ?