

M1 MPA : Algèbre et Arithmétique 2016–2017

Feuille d'exercices n° 5

I. Réduire sur \mathbf{Z} les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(C'est-à-dire trouver des matrices qui sont équivalentes sur \mathbf{Z} mais de la forme $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$ et d_1, \dots, d_r sont non nuls et vérifiant $d_1 | d_2 | \dots | d_r$.)

- II. (a) Soit G un groupe abélien de type fini. Montrer que si G n'a pas d'éléments d'ordre fini autres que 0, alors G est un \mathbf{Z} -module libre.
- (b) Donner les facteurs invariants du groupe $H = \mathbf{Z}/72\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/84\mathbf{Z}$. Le groupe H est-il isomorphe à $\mathbf{Z}/36\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/168\mathbf{Z}$?
- (c) Classifier à isomorphisme près les groupes abéliens d'ordre 30, 100 et 81.
- (d) Soit N le sous-module de \mathbf{Z}^3 engendré par $(3, -12, 10)$, $(-12, 64, -60)$ et $(10, -60, 60)$. Montrer qu'on a $\mathbf{Z}^3/N \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/20\mathbf{Z}$.
- (e) Quels sont les facteurs invariants du \mathbf{Z} -module suivant ?

$$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^2 \oplus \mathbf{Z}/27\mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3 \oplus \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}.$$

- III. (a) Soit G le groupe abélien engendré par deux éléments x, y satisfaisant à la relation $3x + 4y = 0$. Ecrire G comme produit de groupes cycliques.
- (b) Même question pour G engendré par x, y satisfaisant à la relation $3x - 6y = 0$.
- (c) Même question pour G engendré par x, y, z satisfaisant aux relations $2x + 4y = 0$ et $2x + 2y + z = 0$.

- IV. (a) Quels sont les facteurs invariants de $\frac{\mathbf{Z}[i]}{(6 + 8i)\mathbf{Z}[i]}$ et de $\frac{\mathbf{Z}[i]}{(10 + 15i)\mathbf{Z}[i]}$ en tant que \mathbf{Z} -modules ?
- (b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$, et soit $\delta = \text{pgcd}(a, b, c, d)$. Quels sont les facteurs invariants de A ?
- (c) Soit $a, b \in \mathbf{Z}$. Quels sont les facteurs invariants de $\frac{\mathbf{Z}[i]}{(a + bi)\mathbf{Z}[i]}$ en tant que \mathbf{Z} -module ?