M1 MPA : Algèbre et Arithmétique 2016–2017
Feuille d'exercices n° 6

I. (a) Soit $E \subset F$ une extension de corps. Montrer que $x \in F$ est algébrique sur E ssi $E[x]$ est un corps.

(b) Soit K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible. Soit $L = K[X]/(P)$. Montrer que P a une racine dans L.

II. (a) Exprimer $X^4 + X^3 - 2X - 2$ comme produit de polynômes irréductibles de $\mathbf{Q}[X]$ puis de $\mathbf{R}[X]$.

(b) Lesquels des polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbf{Q}[X]$?

$$X^3 - 7X^2 + 3X + 3, \qquad X^3 - 3X - 4, \qquad X^4 + 1,$$
$$3X^7 - 18X^3 + 72X^2 - 6X - 18, \qquad X^4 + 15X^3 + 7.$$

III. (a) Trouver le polynôme minimal de $\omega_7 = e^{2\pi i/7}$.

(b) Montrer que $X^3 + X^2 - 2X - 1$ est le polynôme minimal de $2\cos 2\pi/7 = \omega_7 + \omega_7^{-1}$.

(c) Trouver le polynôme minimal de $\cos 2\pi/5$.

IV. Trouver les polynômes minimaux sur $\mathbf{Q}$ de

(a) $(1+\sqrt{5})/2$, $4^{1/3}$, $\sin \pi/8$, $e^{\pi i/3}$.

(b) $e^{2\pi i/p}$ pour un nombre premier p.

V. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ et ensuite que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

VI. Déterminer les corps de rupture de

(a) $X^2 + 3X + 1$ sur $\mathbf{Q}$.

(b) $X^2 + 3iX + 1$ sur $\mathbf{Q}(i)$.

(c) $X^6 - 2$ sur $\mathbf{Q}$.

(d) $X^4 - 2X^2 + 4$ sur $\mathbf{Q}$.

Dans chaque cas préciser le cardinal du groupe d'automorphismes de l'extension.

VII. Lesquels des énoncés suivants sont vrais ? Justifier vos réponses.

(a) $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \cong \mathbf{Q}(\sqrt{3})$.

(b) $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \cong \mathbf{Q}(1-\sqrt{8})$.

(c) $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(\sqrt[5]{3})/\mathbf{Q}) = 1$.

(d) $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbf{Q}) = 1$.

VIII. Déterminer le degré sur $\mathbf{Q}$ du corps de décomposition de $P \in \mathbf{Q}[X]$ pour

(a) $P(X) = X^4 - 1$,

(b) $P(X) = X^3 - 2$,

(c) $P(X) = X^4 + 1$.