

Notes de travail par J. YAMEOGO
Laboratoire J.A. Dieudonné
Bureau 721 - 3ème étage
Tél. : 04 92 07 62 96
e-mail : yameogo@math.unice.fr

Notes de Cours/TD pour la préparation au
concours de capes externe de mathématiques.

Algèbre linéaire

(Paragraphe 2.III. du programme complémentaire)

Bibliographie :

- M. QUEYSANNE
Algèbre
1^{er} cycle scientifique, préparation aux grandes écoles.
Armand Colin - Collection U
- ROGER GODEMENT
Cours d'algèbre
Hermann - Collection Enseignement des sciences
- L. LESIEUR, R. TEMAM, J. LEFEBVRE
Compléments d'algèbre linéaire
Mathématiques spéciales, 1^{er} cycle, 2^e année.
Armand Colin - Collection U

Dans tout ce qui suit, le corps de base K sera un sous-corps de \mathbb{C} .

1 Espaces vectoriels

Travail 1.1 Pour commencer, s'assurer que l'on sait ce que recouvrent des mots-clés comme

- **corps**
- **sous-corps**
- **espace vectoriel sur un corps**

Ensuite se donner des exemples (**une infinité d'exemples**).

Se convaincre enfin qu'une auto-évaluation et une consolidation des acquis par des exercices est nécessaire.

Travail 1.2 V est un K -espace vectoriel, X est un ensemble non vide et $V^X = \{f : X \longrightarrow V\}$ (l'ensemble des applications de X dans V).

Mettre une structure de K -espace vectoriel sur V^X . Donner des exemples.

Travail 1.3 V est un K -espace vectoriel et X est un ensemble non vide. Pour $f \in V^X$, on appelle **support** de f l'ensemble

$$\text{supp}(f) = \{x \in X, f(x) \neq 0_V\}.$$

On dit que f est à support fini lorsque $\text{card}(\text{supp}(f))$ est fini.

1. Soit Y un sous-ensemble non vide de X .
 $V_Y = \{f \in V^X, \text{supp}(f) \subset Y\}$ est un sous-espace vectoriel de V^X .
2. L'ensemble des $f \in V^X$ à support fini est un sous-espace vectoriel de V^X .

Travail 1.4 Soit $E = K[X]_n$ le K -espace vectoriel des polynômes à une variable, à coefficients dans K , de degré au plus n ($n \geq 1$).

1. $V = \{P \in E \mid \exists x \in K, P(x) = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. Soient $a, b \in K, (a \neq b)$. On considère $W_a = \{P \in E \mid P(a) = 0\}$ et $W_b = \{P \in E \mid P(b) = 0\}$.
 - a) Vérifier que W_a (resp. W_b) est un sous-espace vectoriel de E .

$$W_a + W_b = ?$$

- b) Pour $n \geq 2$, donner une base de $W_a \cap W_b$.
- c) On suppose $n \geq 2$. Soit F_a (resp. F_b) un supplémentaire de W_a (resp. W_b) dans E . $F_a + F_b$ est-il un supplémentaire de $W_a \cap W_b$? Donner une base d'un supplémentaire de $W_a \cap W_b$.

Travail 1.5 Soit q la forme quadratique définie sur K^3 (K est \mathbb{R} ou \mathbb{C}) par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy + 4xz + 6yz.$$

L'ensemble \mathcal{I}_K des vecteurs isotropes de q est-il un sous-espace vectoriel de K^3 ?

Même question pour la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = -3x^2 - 5y^2 - 8xy + 3xz + 5yz.$$

Décrire une méthode générale (i.e valable pour toute forme quadratique q sur K^3) permettant de répondre aux questions ci-dessus.

Travail 1.6 On définit une forme quadratique q sur K^3 en vous donnant sa matrice $M(q)$ (symétrique) dans une base de K^3 et on vous demande si l'ensemble \mathcal{I}_K des vecteurs isotropes de q est un sous-espace vectoriel de K^3 . Que faites-vous?

Définitions 1.7 Soient E et F deux K -espaces vectoriels.

1. L'ensemble $\mathcal{L}_K(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un K -espace vectoriel. Lorsque $E = F$ on parle d'**endomorphismes** de E .
2. L'espace des endomorphismes de E $End_K(E)$ muni de la loi de composition des applications est une K -algèbre.
Faites en la vérification après avoir rappelé la définition d'une K -algèbre.
3. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire bijective. Alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est *linéaire*. On dit alors que les deux K -espaces vectoriels E et F sont **isomorphes**. Lorsque $E = F$, on parle d'**automorphisme** de E .
4. L'ensemble des automorphismes de E ($Aut(E)$) muni de la loi de composition des applications est un groupe.
Faites en la vérification après avoir rappelé la définition d'un groupe.

Travail 1.8 Soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K -espace vectoriel E , $f : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ l'application linéaire définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Montrer que $Ker(f)$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

Travail 1.9 Soit E un K -espace vectoriel. On dit que $p \in End_K(E)$ est un **projecteur** si $p^2 = p$ ($p^2 = p \circ p$). Montrer que si $p \in End_K(E)$ est un projecteur, alors on a $E = Ker(p) \oplus Im(p)$. La réciproque est-elle vraie?

Définition 1.10 (Famille libre)

1. Soient E un K -espace vectoriel, $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_p\}$ une famille finie d'éléments de E . On dit que la famille \mathcal{F} est **libre** (ou linéairement indépendante) si
la relation $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$ ($\lambda_i \in K$)
entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
S'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$, la famille \mathcal{F} est dite **liée**.
2. Une famille quelconque \mathcal{F} d'éléments de E est dite libre si toute sous-famille finie de \mathcal{F} est libre.
3. Si $\mathcal{B} \subset E$ est une **famille génératrice et libre**, on dit que \mathcal{B} est une **base** de E .

Travail 1.11 La famille $\mathcal{F} = \{\sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle libre dans le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} ?

2 Quelques définitions et résultats fondamentaux

Définition 2.1 Un K -espace vectoriel E est dit **de dimension finie** s'il admet un système fini de générateurs.

Théorème 2.2 Soient E un K -espace de dimension finie, $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ une partie finie de E . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. \mathcal{B} est une base de E
2. \mathcal{B} est une partie génératrice minimale (pour la relation d'inclusion)
3. \mathcal{B} est une partie libre maximale.

Théorème 2.3 Soient E un K -espace de dimension finie, $\mathcal{L} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une partie libre de E , $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_p\}$ une partie génératrice de E . Alors on a $n \leq p$.

Théorème 2.4 (Existence de base en dimension finie)

Soient E un K -espace de dimension finie, $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_p\}$ une partie génératrice finie de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ une partie libre.

Alors il existe \mathcal{B} base de E telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}.$$

Théorème 2.5 (Théorème de la base incomplète)

Soient E un K -espace de dimension finie, \mathcal{L} une partie libre finie, \mathcal{F} une partie génératrice finie de E .

Alors il existe $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{L} \cup \mathcal{H}$ est une base de E .

Théorème 2.6 (dimension)

E étant un K -espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases de E ont même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E .

Travail 2.7

Tout K -espace vectoriel E de dimension finie n est isomorphe à K^n .

Définition 2.8 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soient E un K -espace vectoriel, \mathcal{F} une famille de vecteurs de E . On appelle **rang** de \mathcal{F} , noté $rg(\mathcal{F})$, la dimension (*supposée finie*) du sous-espace vectoriel de E engendré par \mathcal{F} .

Définition 2.9 (Rang d'une application linéaire)

Soient E, F deux K -espaces vectoriels, $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie.

On appelle rang de f , noté $rg(f)$, la dimension du sous-espace vectoriel $Im(f) \subset F$ de F .

Théorème 2.10 Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ où E est de dimension finie n . Alors on a

$$rg(f) = \dim_K(E) - \dim_K(Ker(f)).$$

Travail 2.11 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $f \in End_K(E)$ un endomorphisme de E . Montrer que $Im(f) = Im(f^2)$ entraîne $E = Ker(f) \oplus Im(f)$. La réciproque est-elle vraie ?

Travail 2.12 $E = \mathbb{R}[X]_2$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à une variable, à coefficients dans \mathbb{R} , de degré au plus 2.

Soit $f \in End_K(E)$ l'endomorphisme de E qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $(X^3 + 1)$.

Quel est le rang de f ?

Travail 2.13 Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimensions finies, $f, g : E \rightarrow F$ deux applications linéaires.

1. Comparer $rg(f + g)$ et $(rg(f) + rg(g))$.
2. Montrer que $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f + g)$.

Travail 2.14 Soit V un K -espace vectoriel. Un endomorphisme non nul $u \in End_K(V)$ est dit **nilpotent** s'il existe un entier $p > 1$ tel que $u^p = 0$. Le plus petit entier naturel non nul r vérifiant $u^r = 0$ est appelé indice de nilpotence de u .

1. Montrer que si V est de dimension finie d et $u \in End_K(V)$ est un endomorphisme nilpotent, alors on a $u^d = 0$.
2. Donner des exemples d'endomorphismes nilpotents (*avec différents indices de nilpotence*) d'un K -espace vectoriel V de dimension 4.
3. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un K -espace vectoriel V de dimension $d > 0$. r étant l'indice de nilpotence de u , on considère $e(u)$ le sous-espace vectoriel de $End_K(V)$ engendré par $\{u^i, i \in \mathbb{N}\}$. Donner une base de $e(u)$.
4. On note Id_V l'endomorphisme identité de V . Montrer que si u est nilpotent, alors pour tout entier naturel s , $(Id_V - u)^s$ est un automorphisme de V .

5. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un K -espace vectoriel V de dimension $d > 0$. r étant l'indice de nilpotence de u , on considère $x \in V$ vérifiant $u^{r-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille

$\mathcal{F} = \{x, (Id_V - u)(x), \dots, (Id_V - u)^s(x), \dots, (Id_V - u)^{r-1}(x)\}$ est libre.

Donner un exemple pour $\dim_K(V) = 4$.

Travail 2.15 Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien usuel \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $u = (1, 1, 2)$ et $v_t = (1, t, 1)$ (où t est un paramètre réel).

Trouver tous les vecteurs $w \in \mathbb{R}^3$ permettant de compléter le système (u, v_t) en une base de \mathbb{R}^3 .

Travail 2.16 Soient E un K -espace vectoriel de dimension 3 et V_1, V_2, V_3 trois plans vectoriels de E tels que $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0_E\}$.

Calculer les dimensions des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $V_1 + V_2, V_2 + V_3, V_3 + V_1$
2. $V_1 \cap V_2, V_2 \cap V_3, V_3 \cap V_1$
3. $V_1 + (V_2 \cap V_3), (V_1 \cap V_2) + V_3, (V_1 + V_2) \cap V_3, V_1 \cap (V_2 + V_3)$
4. $((V_1 \cap V_2) + (V_2 \cap V_3)) \cap (V_3 \cap V_1)$
5. $(V_1 \cap V_2) + (V_2 \cap V_3) + (V_3 \cap V_1)$.

3 Formes linéaires, dualité

Définition 3.1 (formes linéaires)

Soit E un K -espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E , toute application linéaire $f : E \rightarrow K$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, K)$ des formes linéaires sur E a une structure de K -espace vectoriel appelé espace vectoriel **dual** de E et est noté E^* . Le dual de E^* est appelé **bidual** de E et est noté E^{**} .

Définition 3.2 (hyperplan)

Soit E un K -espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de E tout supplémentaire d'une droite vectorielle de E .

$H \subset E$ est un hyperplan de E si et seulement si il existe $D \subset E$ droite vectorielle telle que $E = H \oplus D$.

Travail 3.3

1. Soient E un K -espace vectoriel et $f \in E^*$ une forme linéaire non nulle sur E . Montrer que $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan de E .
2. Montrer que tout hyperplan H d'un K -espace vectoriel E est le noyau d'une forme linéaire $f : E \rightarrow K$. L'équation $f(x) = 0$ est alors appelée équation de l'hyperplan H .

Travail 3.4 Soit E un K -espace vectoriel (de dimension quelconque). On considère l'application $e_v : E \rightarrow E^{**}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad e_v(x) : \begin{array}{l} E^* \longrightarrow K \\ f \longmapsto f(x). \end{array}$$

Montrer que e_v est linéaire injective.

Théorème 3.5 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Alors les formes linéaires f_1, \dots, f_n définies par

$$f_j(e_i) = \delta_i^j \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

forment une base de E^* appelée **base duale** de la base \mathcal{B} .

Travail 3.6 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans \mathbb{R} . On prend pour base de E le système $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^i, \dots\}$ et on considère la famille $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_j, \dots\} \subset E^*$ définie par

$$f_j(X^i) = \delta_i^j.$$

Montrer que la famille \mathcal{F} est libre. Cette famille constitue-t-elle une base de E^* ?

Travail 3.7 Soit $E = \mathbb{R}[X]_n$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans \mathbb{R} et de degré au plus n ($n \geq 1$). On considère $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ($a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$) et la famille $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_n\} \subset E^*$ définie par

$$\forall P \in E, f_j(P) = P(a_j).$$

Vérifier que \mathcal{F} est une base de E^* et déterminer la base \mathcal{B} de E dont elle est la duale.

Qu'en est-il de la famille $\mathcal{G} = \{g_0, g_1, \dots, g_n\} \subset E^*$ définie par

$$\forall P \in E, g_j(P) = P^{(j)}(a_0)?$$

Définition 3.8 (orthogonalité) Soient E un K -espace vectoriel et E^* son dual.

1. On dit que $x \in E$ est **orthogonal** à $f \in E^*$ (ou que $f \in E^*$ est **orthogonal** à $x \in E$) si $f(x) = 0$.
2. On dit qu'une partie non vide $A \subset E$ est **orthogonale** à une partie non vide $B \subset E^*$ si pour tout $x \in A$ et tout $f \in B$ on a $f(x) = 0$.

Propriétés 3.9 Soient E un K -espace vectoriel et E^* son dual.

1. Soit A une partie non vide de E . Alors l'ensemble A^\perp des formes linéaires orthogonales à A est un sous-espace vectoriel de E^* .
2. Soient A une partie non vide de E et $\text{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par A . Alors on a $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
3. Énoncés analogues pour une partie non vide B de E^* .

Théorème 3.10 (dimension du sous-espace orthogonal)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Pour tout sous-espace vectoriel V de E , on a

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E) = \dim(E^*).$$

2. Pour tout sous-espace vectoriel W de E^* , on a

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(E) = \dim(E^*).$$

Preuve : Exercice.

Corollaire 3.11 (double orthogonal)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , E^* son dual.

1. Pour tout sous-espace vectoriel V de E , on a $(V^\perp)^\perp = V$.
2. Pour tout sous-espace vectoriel W de E^* , on a $(W^\perp)^\perp = W$.

Travail 3.12 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer les égalités suivantes :

1. $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$.
2. $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$.

Définition 3.13 (transposée d'une application linéaire)

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Pour toute forme linéaire $\varphi \in F^*$, on a $\varphi \circ f \in E^*$. L'application ${}^t f : F^* \rightarrow E^*$ définie par ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$ est linéaire et est appelée **transposée** de f . Pour tout $x \in E$, $[{}^t f(\varphi)](x) = \varphi(f(x))$.

Travail 3.14 E est le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans \mathbb{R} , de degré au plus 3. a_0, a_1, a_2 sont trois points distincts de \mathbb{R} . $u \in \text{End}_{\mathbb{R}}(E)$ est l'endomorphisme de E défini par

$$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X - a_0) - P'(X - a_1) + P'(X - a_2).$$

$\varphi \in E^*$ est la forme linéaire définie par

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = \int_{a_1}^{a_2} P(t) dt.$$

1. Déterminer la forme linéaire ${}^t u(\varphi)$.
2. Soient $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ les quatre formes linéaires définies par : $\forall P \in E$,

$$\phi_1(P) = P(a_1); \quad \phi_2(P) = P(a_2); \quad \phi_3(P) = P'(a_1); \quad \phi_4(P) = P'(a_2).$$

$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est une base de E^* (**en faire la vérification**). De quelle base de E est-elle la duale ?

Ecrire la forme linéaire ${}^t u(\varphi)$ dans la base $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$.

4 Matrice d'une application linéaire

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe seront supposés de dimension finie. Le corps de base est toujours un sous-corps de \mathbb{C} .

Définition 4.1 Soient E, F deux K -espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p . On suppose E et F munis respectivement des bases $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_p\}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

Tout $x \in E$, s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $x_j \in K$. On a donc

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j),$$

et l'application linéaire f est entièrement déterminée par la donnée des $f(e_j)$, $j = 1, \dots, n$.

Comme $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_p\}$ est une base de F , pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a de manière unique

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} v_i, \quad a_{ij} \in K.$$

L'application linéaire f est donc entièrement déterminée par la donnée des $p \times n$ scalaires $\{a_{ij}\}_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, n}$.

On appelle matrice de l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} , la matrice à coefficients dans K

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, n}, \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^p a_{ij} v_i = f(e_j).$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées dans la base \mathcal{C} du vecteur $f(e_j)$ se trouvent sur la j -ème colonne de la matrice ci-dessus.

Remarques 4.2 (cas particuliers)

Soient E, F deux K -espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p , munis respectivement des bases $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_p\}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1. Si $n = 1$, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est une matrice unicolonne.
2. Si $p = 1$, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est une matrice uniligne.
3. Si $E = F$, on a $n = p$, f est un endomorphisme de E et $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est une matrice carrée $n \times n$. Si en plus $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est notée tout simplement $M_{\mathcal{B}}(f)$ et on parle de la matrice de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B} .

Travail 4.3

On considère les \mathbb{R} -espaces vectoriels $E = \mathbb{R}[X]_3$ et $F = \mathbb{R}[X]_2$ munis respectivement des bases $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ et $\mathcal{C} = \{1, X - 1, X^2 - 1\}$. Soit $f : E \rightarrow F$ définie par $f(P) = P'$. Déterminer $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Quelle est la matrice dans la base \mathcal{C} de l'endomorphisme g de F défini par $g(P) = XP'$?

Travail 4.4 L'espace euclidien usuel \mathbb{R}^3 est supposé muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un vecteur de \mathbb{R}^3 dans cette base. Donner dans la base \mathcal{B} la matrice de chacune des transformations linéaires suivantes :

1. La symétrie (orthogonale) par rapport au plan des (x, y)
2. La symétrie (orthogonale) par rapport au plan d'équation $x = y$
3. La projection orthogonale sur le plan d'équation $y = z$
4. La symétrie (orthogonale) par rapport au plan d'équation

$$ax + by + cz = 0$$

pour $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})$.

5. La projection orthogonale sur le plan d'équation

$$ax + by + cz = 0$$

pour $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})$.

Travail 4.5 Le K -espace vectoriel $E = K[X]_n$ étant supposé muni de sa base canonique $\mathcal{C} = \{1, \dots, X^i, \dots, X^n\}$, on considère l'application $f : E \rightarrow E$, donnée par $f(P) = q(P) + r(P)$, où $q(P)$ est le quotient de la division de P par X , et $r(P)$ est le reste de la division de P par X^n .

Montrer que f est un endomorphisme de E et donner la matrice M de f dans la base \mathcal{C} . Calculer le rang de M .

Travail 4.6 Soit $M_{pn}(K)$ le K -espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes, à coefficients dans K . Quelle est la dimension de $M_{pn}(K)$? Donner une base de $M_{pn}(K)$. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p . Montrer que $\mathcal{L}_K(E, F)$ est isomorphe à $M_{pn}(K)$.

Travail 4.7 (changement de base)

Soient E, F deux K -espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F . On pose $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ (la matrice faisant passer de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'), $Q = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}(\text{Id}_F)$ (la matrice faisant passer de la base \mathcal{C} à la base \mathcal{C}'). Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = M$. Donner $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$ en fonction de M, P et Q .

Travail 4.8 Pour un entier naturel non nul q , $GL_q(K)$ désigne le groupe des matrices carrées $q \times q$ inversibles.

1. Montrer que la relation binaire \mathcal{R} définie sur $M_{pn}(K)$ par

$$M\mathcal{R}N \iff (\exists P \in GL_p(K), \exists Q \in GL_n(K); N = PMQ)$$

est une relation d'équivalence sur $M_{pn}(K)$.

Deux matrices M et $N \in M_{pn}(K)$ sont dites équivalentes si $(\exists P \in GL_p(K), \exists Q \in GL_n(K))$ telles que $N = PMQ$

2. Montrer que deux matrices M et $N \in M_{pn}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
3. Montrer que la relation binaire \mathcal{R} définie sur $M_n(K)$ par

$$M\mathcal{R}N \text{ si et seulement si } (\exists P \in GL_n(K) \text{ telle que } N = P^{-1}MP)$$

est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$.

Deux matrices M et $N \in M_n(K)$ sont dites semblables si $(\exists P \in GL_n(K))$ telle que $N = P^{-1}MP$

Travail 4.9 Soit $M \in M_{pn}(K)$. Montrer que l'on a $rg(M) \leq 1$ si et seulement si

$$\exists A \in M_{p1}(K), B \in M_{1n}(K) : M = AB.$$

Travail 4.10 (trace d'une matrice carrée)

Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans K . On appelle **trace** de M notée $Tr(M)$ le scalaire

$$Tr(M) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \text{ (somme des éléments diagonaux de la matrice } M).$$

1. Montrer que l'application $Tr : M_n(K) \longrightarrow K$ qui à une matrice carrée $n \times n$ associe sa trace est une forme linéaire.
2. Pour $M, N \in M_n(K)$, montrer que

$$Tr(MN) = Tr(NM)$$

3. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

Travail 4.11 E est le K -espace vectoriel $M_n(K)$. Etudier l'application $\tau_r : E \longrightarrow E^*$ définie par

$$\forall A \in E, \forall X \in E, \tau_r(A)(X) = Tr(AX).$$

Travail 4.12 Montrer que toute matrice $M \in M_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls.

5 Applications multilinéaires - Déterminants

Définition 5.1 (Applications multilinéaires) Soient E_1, \dots, E_n et F des K -espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ est dite n -linéaire si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, quel que soit $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \dots \times E_n$, l'application partielle $f(x_1, \dots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, \dots, x_n) : E_i \longrightarrow F$ est linéaire. Lorsque $F = K$ on parle de *forme n -linéaire*. Lorsque $n = 2$ (resp. $n = 3$) on parle d'*application bilinéaire* (resp. *trilinéaire*).

Exemple 5.2 (Forme bilinéaire canonique) Soit E un K -espace vectoriel, E^* son dual. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E^* &\longrightarrow K \\ (x, f) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est bilinéaire.

Théorème 5.3 L'ensemble des applications n -linéaires de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F est un K -espace vectoriel noté $\mathcal{L}_n(E_1 \times \dots \times E_n, F)$.

Remarque 5.4

Ne pas confondre $\mathcal{L}_n(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ et $\mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ (l'espace des applications linéaires de l'espace vectoriel produit $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F).

Travail 5.5 Soient E_1, E_2, E_3 et F des K -espaces vectoriels. Pour $f \in \mathcal{L}_3(E_1 \times E_2 \times E_3, F)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$, $\lambda \in K$, calculer $f(x + y)$ et $f(\lambda x)$.

Travail 5.6 Soit F un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $m > 0$. Calculer les dimensions des \mathbb{R} -espaces vectoriels suivants :

1. $\mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, F)$ et $\mathcal{L}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, F)$
2. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, F)$ et $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, F)$
3. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, F)$ et $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, F)$

Travail 5.7 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie d .

1. Rappeler la définition d'une forme n -linéaire symétrique sur E . Après avoir vérifié que l'ensemble des formes n -linéaires symétriques sur E est un K -espace vectoriel, calculer la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E .
2. Mêmes questions que ci-dessus pour ce qui concerne les formes n -linéaires antisymétriques sur E .

Définition 5.8 (Forme n -linéaire alternée)

Soient E et F des K -espaces vectoriels. Une application n -linéaire $f : E^n \rightarrow F$ est dite *alternée* si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ on a :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, (x_i = x_j \text{ et } i \neq j) \implies f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Théorème 5.9 *Toute application n -linéaire alternée définie sur E^n est antisymétrique. Réciproquement si le corps de base K n'est pas de caractéristique 2, toute application n -linéaire antisymétrique est alternée.*

Travail 5.10 Prouver le théorème 5.9 ci-dessus.

Théorème 5.11 *E étant un K -espace vectoriel de dimension finie n , le K -espace vectoriel des formes n -linéaires alternées définies sur E^n est de dimension 1.*

Travail 5.12 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et f une forme n -linéaire alternée non nulle définie sur E^n . Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, montrer que la famille $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ est liée si et seulement si $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Théorème-Définition 5.13 *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n . Une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E étant donnée, il existe une et une seule forme n -linéaire alternée f définie sur E^n , telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(x_1, \dots, x_n)$ est appelé*

déterminant de (x_1, \dots, x_n) relativement à la base \mathcal{B} et se note

$$\det_{(e_i)}(x_1, \dots, x_n)$$

où tout simplement $\det(x_1, \dots, x_n)$ si le contexte est clair.

Travail 5.14 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).$$

En particulier si $(x_1, \dots, x_n) = (e'_1, \dots, e'_n) = \mathcal{B}'$, on a

$$1 = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$$

Théorème 5.15 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . Alors il existe un unique scalaire $\lambda \in K$ tel que pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E on a

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \lambda.$$

Ce scalaire λ s'appelle **déterminant de u** et est noté $\det(u)$.

Travail 5.16 Donner la preuve du théorème 5.15 ci-dessus.

Travail 5.17 Soient un K -espace vectoriel de dimension finie n , u et v deux endomorphismes de E . Prouver les énoncés suivants :

1. $(u \in \text{Aut}(E)) \iff \det(u) \neq 0$
2. $\det(u \circ v) = (\det(u)) \times (\det(v))$
3. $\forall u \in \text{Aut}(E), \det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}$

Travail 5.18 Le plan affine réel étant identifié à \mathbb{C} , on se donne n points A_1, \dots, A_n d'affixes respectifs $a_i (1 \leq i \leq n)$.

Etudier la possibilité de construire un polygone du plan affine, dont les A_i sont les milieux des côtés.

Travail 5.19 Résoudre dans \mathbb{C}^3 le système linéaire suivant où $t \in \mathbb{C}$ est un paramètre :

$$\begin{cases} tx + y + t^2z & = & 0 \\ x + \bar{t}y + tz & = & 0 \\ tx + \bar{t}^2y + z & = & 0 \end{cases}$$

Travail 5.20 a, b et c étant des paramètres réels soumis à la condition $a + 2b + c = 0$, résoudre dans \mathbb{R}^3 le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz & = & 1 \\ cx + ay + bz & = & 1 \\ bx + cy + az & = & 1 \end{cases}$$

Travail 5.21 Pour un entier $n (n \geq 2)$ et $A \in M_n(K)$, donner le rang de $\text{com}(A)$ (la comatrice de A) en fonction de celui de A .

Travail 5.22 θ est un nombre réel fixé. n est un entier naturel ($n \geq 2$). Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{ij} = \cos(\theta + i + j).$$

Même question pour la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{ij} = \sin(\theta + i + j).$$

6 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

6.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition 6.1.1 (Structure de K -algèbre) Soient K un corps commutatif, E un ensemble muni d'une addition (notée $+$), d'une multiplication interne (notée $*$) et d'une multiplication externe (notée \times , à domaine K). On dit que E a une structure de K -algèbre ($(E, +, *, \times)$ est une K -algèbre) si :

1. $(E, +, \times)$ est un K -espace vectoriel
2. $(E, +, *)$ est un anneau
3. Pour tout $\lambda \in K$ et tout couple (x, y) d'éléments de E on a

$$\lambda \times (x * y) = (\lambda \times x) * y = x * (\lambda \times y).$$

On dit que E a une structure de K -algèbre commutative si l'anneau $(E, +, *)$ est commutatif pour la multiplication interne.

On dit que E a une structure de K -algèbre unitaire si l'anneau $(E, +, *)$ admet un élément neutre pour la multiplication interne.

Soit E un K -espace vectoriel. $End_K(E)$ est le K -espace vectoriel des applications linéaires $u : E \longrightarrow E$. $(End_K(E), +, \times, \circ)$ est une K -algèbre.

Propriété 6.1.2 Si E est un K -espace vectoriel de dimension finie n , alors $End_K(E)$ est isomorphe à $M_n(K)$ et est donc de dimension n^2 . La donnée d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E détermine un isomorphisme $\phi_{\mathcal{B}} : End_K(E) \longrightarrow M_n(K)$, définie par $\phi_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. $\phi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de K -algèbres.

Définition 6.1.3

Soient E un K -espace vectoriel (de dimension quelconque), V un sous-espace vectoriel de E et $u \in End_K(E)$. On dit que V est stable par u si $u(V) \subset V$ (i.e. pour tout $x \in V$, on a $u(x) \in V$). Si V est un sous-espace de E stable par u , alors la restriction $u|_V$ de u à V est un endomorphisme de V .

Travail 6.1.4 Soit E un K -espace vectoriel de dimension 4 ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On note (x_1, x_2, x_3, x_4) les coordonnées d'un vecteur dans cette base. Soit $u_t \in \text{End}_K(E)$ ($t \in K$) définie par

$$u(e_i) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 - te_i.$$

Pour quelles valeurs du paramètre a l'hyperplan vectoriel H_a d'équation $ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est-il stable par u_t ?

Pour ces valeurs de a , décrire matriciellement $u_t|_{H_a}$.

Propriété 6.1.5 Soient $u, v \in \text{End}_K(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$ (on dit que u et v commutent), alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

Définition 6.1.6 (Polynôme d'un endomorphisme)

Soient E un K -espace vectoriel, $u \in \text{End}_K(E)$. A tout polynôme $P \in K[X]$ ($P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$) on associe l'endomorphisme $P(u) = \sum_{i=0}^d a_i u^i \in \text{End}_K(E)$ où $u^0 = \text{Id}_E$, $u^i = u \circ u \circ \dots \circ u$ (i fois).

Propriété 6.1.7

Pour $u \in \text{End}_K(E)$ fixé, l'application $\varphi_u : K[X] \rightarrow \text{End}_K(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme d'algèbres. $\text{Im}(\varphi_u)$ est une sous-algèbre commutative de $\text{End}_K(E)$, $\text{ker}(\varphi_u)$ est un idéal de $K[X]$.

Théorème 6.1.8 (Théorème de décomposition des noyaux)

Soient $P, Q \in K[X]$, $u \in \text{End}_K(E)$. On suppose que $(P, Q) = 1$. Alors $\text{Ker}(PQ(u)) = \text{Ker}(QP(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

Plus généralement, si $P = P_1 \times \dots \times P_s$ est un élément de $K[X]$ tel que pour $i \neq j$ on ait $(P_i, P_j) = 1$, alors $\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^s \text{Ker}(P_i(u))$.

Travail 6.1.9 Donner un schéma de preuve du théorème 6.1.8 ci-dessus.

6.2 Valeurs propres d'un endomorphisme

Définition 6.2.1 Soient E un K -espace vectoriel, $u \in \text{End}_K(E)$. On dit que $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Autrement dit,

$\lambda \in K$ est valeur propre de u si et seulement si il existe un

vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre pour λ .

Le sous-espace $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

Propriété 6.2.2 Si $\lambda \in K$ est une valeur propre de u , le sous-espace propre $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ associé à λ est stable par u et la restriction de u à $E_\lambda(u)$ est une homothétie de rapport λ .

Définition 6.2.3 Soient E un K -espace vectoriel, $u \in \text{End}_K(E)$. On appelle spectre de u , noté $\text{spec}(u)$ (ou $\text{sp}(u)$), l'ensemble des valeurs propres de u .

Travail 6.2.4 Soient $E = K[X]$, $u \in \text{End}_K(E)$ définie par $u(P) = P + XP'$. Quelles sont les valeurs propres de u ?

Travail 6.2.5 Pour $K = \mathbb{R}$ et pour $K = \mathbb{C}$, donner un exemple de K -espace vectoriel E et $u \in \text{End}_K(E)$ tels que $\text{spec}(u) = \emptyset$.

Travail 6.2.6 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, $u, v \in \text{End}_K(E)$. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont mêmes valeurs propres.

Travail 6.2.7 Peut-on se passer de l'hypothèse "E est de dimension finie" dans l'exercice 6.2.6 ci-dessus ?

Travail 6.2.8 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \text{End}_K(E)$, $P \in K[X]$. Montrer que si $\lambda \in \text{spec}(u)$, alors on a $P(\lambda) \in \text{spec}(P(u))$.

6.3 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E . On supposera au besoin E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de sorte que u est identifié à sa matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ dans la base \mathcal{B} .

Propriété 6.3.1 Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \text{End}_K(E)$. Alors $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si et seulement si

$$\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0.$$

Si on note I_n la matrice identité d'ordre n , on a $\lambda \in K$ est une valeur propre de u (ou de manière équivalente de M) si et seulement si

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Définition 6.3.2 E étant K -espace vectoriel de dimension finie n , pour $u \in \text{End}_K(E)$ on pose

$$P_u(X) = \det(u - XId_E) (= \det(M - XI_n)).$$

On montre que $P_u(X)$ est un polynôme de degré n .
 $P_u(X)$ est appelé le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u (ou de manière équivalente, le polynôme caractéristique de la matrice $M = \text{Mat}_B(u)$).

Propriété 6.3.3 *Le polynôme caractéristique est invariant par changement de bases.*

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Propriété 6.3.4 *Soit $M \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n . On a*

$$\det(M - XI_n) = (-1)^n X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n$$

où $a_1 = (-1)^{n-1} \text{Tr}(M)$ et $a_n = \det(M)$.

Rappels 6.3.5

1. Si un polynôme non nul $P \in K[X]$ admet λ pour racine de multiplicité α , alors il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X - \lambda)^\alpha Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$.
2. Si un polynôme non nul $P \in K[X]$ admet $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ pour racines de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, alors il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (X - \lambda_s)^{\alpha_s} Q$ et $Q(\lambda_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq s$.
 On a $\alpha_1 + \dots + \alpha_s \leq \deg(P)$.
 Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = \deg(P)$ alors Q est une constante non nulle et $P = k(X - \lambda_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (X - \lambda_s)^{\alpha_s}$ ($k \in K$). On dit alors que le polynôme P est scindé sur K .
3. Un corps K sur lequel tout polynôme $P \in K[X]$ est scindé est dit algébriquement clos.
4. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le corps } \mathbb{C} \text{ des nombres complexes est algébriquement clos.} \\ \text{Le corps } \mathbb{R} \text{ des nombres réels n'est pas algébriquement clos.} \end{array} \right.$

Travail 6.3.6

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2-t \\ 1 & -1+t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ où t est un paramètre réel.

Calculer le polynôme caractéristique $P_M(X)$ de M et dire pour quelles valeurs du paramètre $P_M(X)$ a une racine double.

Propriété 6.3.7 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Si λ est une racine de multiplicité α du polynôme caractéristique $P_u(X)$ de u , alors on a

$$1 \leq \dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)) \leq \alpha.$$

Travail 6.3.8 Donner une idée de la preuve de la propriété 6.3.7 ci-dessus.

Définition 6.3.9 On dit qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.

Définition 6.3.10 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u est diagonale.

Théorème 6.3.11 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n ; et $u \in \text{End}_K(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in K[X]$ polynôme non nul à racines simples tel que $P(u) = 0$.

Travail 6.3.12 Donner un schéma de preuve pour le théorème 6.3.11 ci-dessus.

Théorème 6.3.13 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \text{End}_K(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes

- i) u est diagonalisable
- ii) Le polynôme caractéristique $P_u(X)$ de u est scindé sur K et pour toute racine λ de multiplicité α de $P_u(X)$ on a

$$\dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)) = \alpha.$$

Corollaire 6.3.14 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \text{End}_K(E)$. Si u admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors u est diagonalisable et chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$ est de dimension 1.

Travail 6.3.15

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres complexes a, b, c pour que la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \text{ ne soit pas diagonalisable.}$$

Travail 6.3.16 Soit E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On définit

$$\begin{aligned} \varphi_u : \text{End}_K(E) &\longrightarrow \text{End}_K(E) \\ f &\longmapsto u \circ f \end{aligned}$$

1. Montrer que φ_u est un endomorphisme de $\text{End}_K(E)$.
2. Montrer que φ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Travail 6.3.17 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n ; $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in K$. On considère l'endomorphisme u de E défini par

$$u(e_i) = e_{i+1} \text{ pour } i = 1, \dots, n-1; \quad u(e_n) = \sum_{i=1}^n -a_{i-1}e_i.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de u pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.
2. Trouver une matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ n'ayant aucune valeur propre réelle.
3. Calculer le polynôme caractéristique de u pour n quelconque.
4. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Soit f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{C} = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E . Donner la matrice de f dans la base \mathcal{C} .

Définition 6.3.18 On dit qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est trigonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que $P^{-1}MP$ est une matrice triangulaire supérieure.

Définition 6.3.19 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Théorème 6.3.20 (Caractérisation des endomorphismes trigonalisables)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \text{End}_K(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes

- i) u est trigonalisable
- ii) Le polynôme caractéristique $P_u(X)$ de u est scindé sur K .

Travail 6.3.21 Indiquer brièvement un schéma de preuve du théorème 6.3.20 ci-dessus.

Propriété 6.3.22

Le corps \mathbb{C} étant algébriquement clos, tout endomorphisme u d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie E est trigonalisable.

Théorème 6.3.23 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E . Alors le polynôme caractéristique de u annule u :

$$P_u(u) = 0.$$

Si u a pour matrice M relativement à une base \mathcal{B} de E , le théorème de Cayley-Hamilton s'énonce

$$P_M(M) = 0.$$

Définition 6.3.24 Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \text{End}_K(E)$. Si λ est une valeur propre de multiplicité α de u , on appelle *sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ* , le sous-espace

$$N_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^\alpha.$$

Propriétés 6.3.25

1. *Si λ est une valeur propre de multiplicité α de u , alors le sous-espace caractéristique $N_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^\alpha$ est de dimension α .*
2. *Si le polynôme caractéristique de $u \in \text{End}_K(E)$ est scindé sur K , alors E est somme directe des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de u .*

Théorème 6.3.26 *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \text{End}_K(E)$ tel que le polynôme caractéristique de u soit scindé sur K :*

$$P_u(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \times \cdots \times (\lambda_s - X)^{\alpha_s}, \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j \text{ } (\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n).$$

Alors pour tout i ($1 \leq i \leq s$) il existe une base

$$\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,\alpha_i}) \text{ de } N_{\lambda_i} = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{\alpha_i}$$

telle que

$$\mathcal{B} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,\alpha_1}, \dots, e_{s,1}, \dots, e_{s,\alpha_s}) \text{ (la réunion des bases } \mathcal{B}_i)$$

est une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Travail 6.3.27 En utilisant le théorème 6.3.26 ci-dessus, trigonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 6.3.28 Soit $M \in M_n(K)$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur K :

$$P_M(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \times \dots \times (\lambda_s - X)^{\alpha_s}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j \quad (\alpha_1 + \dots + \alpha_s = n).$$

Alors il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que

$$P^{-1}MP = M' = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

où $A_i \in M_{\alpha_i}(K)$ est une matrice triangulaire supérieure de la forme

$$A_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + B_i.$$

La matrice M' ci-dessus est dite diagonale par blocs.

Corollaire 6.3.29 *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \text{End}_K(E)$ tel que le polynôme caractéristique de u soit scindé sur K . Alors u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme*

$$u = d + n$$

*où d est un endomorphisme diagonalisable,
 n un endomorphisme nilpotent*

et $dn = nd$ (n et d commutent).