Résumé de la séance du 21 avril 2015

Corollaire 3.17. (critère de cocyclicité) *Soient A, B et C trois points non alignés du plan affine euclidien usuel. Un point M distinct de A et B appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si on a l'égalité suivante pour les angles orientés de droites:*
$(CA, CB) = (MA, MB)$.

Exercice 3.4. Dans le plan euclidien usuel on considère trois points non alignés A, B et C. On note H l'hortocentre du triangle ABC. Montrer que le symétrique orthogonal de H par rapport à un côté appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3.4 Structure des isométries planes

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Nous savons que toute isométrie affine de $\mathcal{P}$ peut se décomposer en un produit de s réflexions, avec $s=0$, $s=1$, $s=2$ ou $s=3$.

- Le cas $s=0$ correspond à l'identité de $\mathcal{P}$.
- Pour s=1, il s'agit d'une réflexion par rapport à une droite affine $\mathcal{D}$.
- Pour $s=2$, on a soit une translation, soit une rotation.
- Pour $s=3$, on est en présence d'une symétrie glissée.

Proposition 3.18. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Alors l'ensemble des translations-rotations de $\mathcal{P}$ forme un sous groupe du groupe des isométries de $\mathcal{P}$.*

Exercice 3.5. Pour quelles valeurs du nombre réel θ, la matrice $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ admet-elle 1 pour valeur propre?
Réponse: S admet la valeur propre 1 si et seulement si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.
A vous de trouvez au moins une justification à cette réponse.

Exercice 3.6. Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien, $v \in \vec{\mathcal{P}}$ un vecteur non nul. Décomposer la translation de vecteur v en un produit de deux réflexions.
Réponse: on commence par se convaincre que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites affines telles que $t_v = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$, alors on a $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$ et $(v \in \vec{\mathcal{D}_1})^{\perp}$. Soit A un point quelconque. Posons $A' = t_v(A)$.
Soient $\mathcal{D}_2$ la médiatrice du segment $[AA']$ et $\mathcal{D}_1$ la parallèle à $\mathcal{D}_2$ par A.
Alors on a $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1} = t_v$ (faire un dessin).

Exercice 3.7. Dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ on considère deux rotations f_1 et f_2. f_1 est d'angle θ_1 et a pour centre A_1. f_2 est d'angle θ_2 et a pour centre A_2.
On suppose f_1 et f_2 distincts de l'identité, $A_1 \neq A_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$. On note $\mathcal{D}_1$ la droite A_1A_2. Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}_2$ passant par A_1, une droite $\mathcal{D}_3$ passant par A_2 telles que $f_1 = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ et $f_2 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_3}$. Montrer que $f_1 \circ f_2$ est une rotation et construire son centre.
Réponse: soient ρ_1 la rotation de centre A_1 et d'angle $\frac{\theta_1}{2}$, ρ_2 la rotation de centre A_2 et d'angle $-\frac{\theta_2}{2}$.
On pose $\mathcal{D}_2 = \rho_1(\mathcal{D}_1)$ et $\mathcal{D}_3 = \rho_2(\mathcal{D}_1)$. On a alors $f_1 = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ et $f_2 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_3}$ et on en déduit que $f_1 \circ f_2 = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_3}$. L'hypothèse $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$ nous permet d'affirmer que les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ ne sont pas parallèles. Si A est le point d'intersection de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_3}$ est la rotation de centre A et d'angle $\theta_1 + \theta_2$ (faire un dessin).

Exercice 3.8. Dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ on considère une rotation ρ de centre A et d'angle θ ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$) et une translation t_v de vecteur non nul v. Montrer que $t_v \circ \rho$ et $\rho \circ t_v$ sont des rotations d'angle θ et expliquer comment construire leur centre respectif.
Réponse: pour $t_v \circ \rho$ par exemple, trouver trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ telles que $t_v = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ et $\rho = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_3}$ (faire un dessin).

3.5 Cercles

Rappelons qu'étant donnés un point ω du plan euclidien usuel $\mathcal{P}$ et un nombre réel r positif ou nul, le cercle de centre ω et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $d(\omega, M) = r$. Supposant le plan muni d'un repère orthonormé (O, e_1, e_2), si ω a pour coordonnées (a, b) et M pour coordonnées (x, y), on a: M appartient au cercle de centre ω et de rayon r si et seulement si $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.
En développant cette dernière équation, on a $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Dans un repère orthonormé du plan, l'équation d'un cercle est de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
Si $a^2 + b^2 - c \geqslant 0$, le lieu des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est le cercle de centre $\omega(a, b)$ et de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
Si $a^2 + b^2 - c < 0$, le lieu des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est vide.

Équation d'un cercle défini par trois points non alignés
Soient M_1, M_2 et M_3 trois points non alignés du plan, on voudrait calculer l'équation du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$. Supposons connus les coordonnées (x_i, y_i) de M_i. Il s'agit de résoudre le système linéaire $\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 2by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_2^2 - 2ax_3 - 2by_3 + c = 0 \end{cases}$ ce qui s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & -1 \\ 2x_2 & 2y_2 & -1 \\ 2x_3 & 2y_3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}.$$

Ce système a pour déterminant: $-4 \times \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix}$. On voit alors que si les points M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés, alors on a une unique solution pour le système.

Intersection d'une droite d'un cercle
Soient $\mathcal{C}$ un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2b + c = 0$ et $\mathcal{D}$ une droite affine définie par un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) et un vecteur directeur unitaire $\vec{v} = \alpha e_1 + \beta e_2$.

Un point M du plan appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}$ $(t \in \mathbb{R})$. D'autre part, le cercle $\mathcal{C}$ ayant pour centre le point ω de coordonnées (a, b), M appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\|\overrightarrow{\omega M}\|^2 = r^2$, avec $r^2 = a^2 + b^2 - c$.
Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{\omega M_0} + \overrightarrow{M_0M}$. D'où $\|\overrightarrow{\omega M}\|^2 = \|\overrightarrow{\omega M_0}\|^2 + t^2 + 2 < \overrightarrow{\omega M_0}, \vec{v} > t$.
Le trinôme $\|\overrightarrow{\omega M_0}\|^2 + t^2 + 2 < \overrightarrow{\omega M_0}, \vec{v} > t - r^2$ admet pour discriminant réduit

$$\Delta' = (< \overrightarrow{\omega M_0}, \vec{v} >)^2 - \|\overrightarrow{\omega M_0}\|^2 + r^2.$$

Notons H le projeté orthogonal de ω sur la droite $\mathcal{D}$. On a $<\overrightarrow{\omega M_0}, \vec{v}> = <\overrightarrow{HM_0}, \vec{v}>$, d'où $\Delta' = \|\overrightarrow{HM_0}\|^2 - \|\overrightarrow{\omega M_0}\|^2 + r^2$. Par Pythagore, on a $\|\overrightarrow{\omega M_0}\|^2 = \|\overrightarrow{\omega H}\|^2 + \|\overrightarrow{HM_0}\|^2$, donc

$$\Delta' = r^2 - \|\overrightarrow{\omega H}\|^2.$$

Si $\Delta' > 0$, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{\omega H}\| < r$, la droite $\mathcal{D}$ rencontre le cercle $\mathcal{C}$ en deux points distincts.

Si $\Delta' < 0$ (c'est-à-dire $\|\overrightarrow{\omega H}\| > r$) la droite et le cercle ne se rencontrent pas.

Si $\Delta' = 0$, la droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle.

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Considérons un cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2b+c = 0$, de centre ω ayant pour coordonnées (a, b) et de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Soient M_0 un point du plan, $\vec{v} = \alpha e_1 + \beta e_2$ un vecteur unitaire et $\mathcal{D}$ la droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{v}$.

On a vu que la droite $\mathcal{D}$ a une intersection non vide avec le cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si le trinôme $T = t^2 + 2 < \overrightarrow{\omega M_0}, \vec{v} > t - r^2 + \|\overrightarrow{\omega M_0}\|^2$a deux racines (distinctes ou confondues).

Supposons que $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Si λ_1, λ_2 sont les racines du trinômes T, on a

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = \|\overrightarrow{\omega M_0}\|^2 - r^2.$$

Si M_1 et M_2 sont les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, on a donc $<\overrightarrow{M_0 M_1}, \overrightarrow{M_0 M_2}> = \lambda_1 \times \lambda_2$. On constate que l'expression $\|\overrightarrow{\omega M_0}\|^2 - r^2$ ne dépend pas de la droite $\mathcal{D}$ passant par M_0 et telle que $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Ce nombre est appelé puissance du point M_0 par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

Il faut remarquer que si on note $p(M, \mathcal{C})$ la puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$, on a:

- $M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow p(M, \mathcal{C}) = 0$
- M est extérieur à $\mathcal{C}$ si et seulement si $p(M, \mathcal{C}) > 0$
- M est intérieur à $\mathcal{C}$ si et seulement si $p(M, \mathcal{C}) < 0$

En fait si nous considérons la fonction polynomiale $p_{\mathcal{C}}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$p_{\mathcal{C}}(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$, si M est un point du plan ayant pour coordonnées (x, y), par définition on a $p_{\mathcal{C}}(x, y) = p(M, \mathcal{C})$.

Proposition 3.19. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres ω et ω' tels que $\omega \neq \omega'$ (on dit que les cercles ne sont pas concentriques). Alors, l'ensemble des points M de plan ayant même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est une droite. Cette droite est appelée axe radical des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.*

Démonstration. Si les cercles $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ ont ont pour équations respectives
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$, pour tout point M de coordonnées (x, y), on a: $p(M, \mathcal{C}) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$ et $p(M, \mathcal{C}') = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c'$.

On en déduit que $p(M, \mathcal{C}) = p(M, \mathcal{C}')$ si et seulement si $2(a - a')x + 2(b - b')y - (c - c') = 0$. Comme $\omega \neq \omega'$, on a $(a - a', b - b') \neq (0, 0)$, donc l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est une droite $\mathcal{D}$ de direction orthogonale au vecteur $\overrightarrow{\omega'\omega}$.

Conclusion: l'axe radical des cercles non concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est une droite orthogonale à la droite $(\omega\omega')$ (appelée droite des centres). $\square$

Exercice 3.9. Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ trois cercles de centres ω_1, ω_2, ω_3 non alignés. Montrer qu'il existe un et seul point N du plan, ayant même puissance par rapport à ces trois cercles. Ce point N est appelé centre radical des cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$.