Chapitre 2
Géométrie euclidienne

Dans ce chapitre, le corps de base des espaces vectoriels ou affines considérés est le corps des nombres réels $\mathbb{R}$. Tous ces espaces seront de dimensions finies.

2.1 Produit scalaire: quelques généralités et formules

Définition 2.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie positive. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sera noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ou $<\vec{u},\vec{v}>$ ou encore $(\vec{u}\,|\vec{v})$.*

Il est important de se souvenir que le produit scalaire est une application,
$<\cdot,\ \cdot>$: $E\ \times\ E\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes (propriétés d'une forme bilinéaire symétrique définie positive):

1. Linéarité par rapport au premier argument:
$\begin{cases} \forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E, (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w} \\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in E, \forall\lambda\in\mathbb{R}, (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) \end{cases}$
2. Linéarité par rapport au second argument:
$\begin{cases} \forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E, \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in E, \forall\lambda\in\mathbb{R}, \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) \end{cases}$
3. $\forall\,\vec{u},\vec{v}\in E, \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie)
4. $\forall\,\vec{u}\in E, \vec{u}\cdot\vec{u}\geqslant 0$ et $(\vec{u}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0})$ (définie positive)

Définition 2.2.

1. *Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire.*
2. *Un espace affine euclidien est un espace affine réel X dont la direction $\vec{X}$ est un espace vectoriel euclidien.*

Si E est un espace vectoriel euclidien, pour $\vec{u}\in E$, la norme euclidienne du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\,\|$ est le nombre réel positif ou nul $\sqrt{<\vec{u},\vec{u}>}$. On a donc par définition $\|\vec{u}\,\|^2=<\vec{u},\vec{u}>$.

On a la proposition suivante (qui justifie le fait que l'on parle de norme):

Proposition 2.3. *Avec les notations précédentes, quels que soient les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ de E et quel que soit le réel λ, on a:*

1. $\|\vec{u}\,\|\geqslant 0$ *et* $(\|\vec{u}\,\|=0\Longleftrightarrow\vec{u}=\vec{0})$
2. $\|\lambda\vec{u}\,\|=|\lambda|\,\|\vec{u}\,\|$
3. $\|\vec{u}+\vec{v}\,\|\leqslant\|\vec{u}\,\|+\|\vec{v}\,\|$ *(inégalité triangulaire)*

Les deux premiers points de la proposition découlent de la définition $\|\vec{u}\,\|=\sqrt{<\vec{u},\vec{u}>}$.
Le troisième point découle de l'inégalité de Schwarz.

Proposition 2.4. (inégalité de Schwarz) *Si E est un espace vectoriel euclidien, alors on a:* $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

Démonstration. On démontre cette proposition en remarquant que pour deux vecteurs quelconques $\vec{u}, \vec{v}$ fixés, pour $t \in \mathbb{R}$, $(t\vec{u} + \vec{v}) \cdot (t\vec{u} + \vec{v})$ est un trinôme en t, toujours positif ou nul, donc de discriminant négatif ou nul.
Le produit scalaire étant bilinéaire et symétrique, cela donne en effet
$(t\vec{u} + \vec{v}) \cdot (t\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 t^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})t + \|\vec{v}\|^2$,
trinôme dont le discriminant est $4((\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2)$.
L'inégalité s'en déduit alors facilement. □

Si X est un espace affine euclidien, l'application d: $X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tous points $A, B \in X$ par $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ est une distance, appelée distance euclidienne sur X.

A partir de la définition même du produit scalaire on a les deux formules suivantes:

Proposition 2.5. *Soit E un espace vectoriel euclidien.*
Alors pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, on a les formules suivantes:

1. $<\vec{u}, \vec{v}> = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ ***(forme polaire)***
2. $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ ***(formule de la médiane)***

Note: pour voir une "médiane" dans la deuxième formule, considérer dans le plan affine réel, un triangle ABC, poser $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et noter I le milieu du segment $[BC]$. On trouve alors $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2\|\overrightarrow{AI}\|^2 + 2\|\overrightarrow{BI}\|^2$.

Définition 2.6. *Soit E un espace vectoriel euclidien. Deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ de E sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul.*

De la proposition 2.5 on déduit facilement le théorème de Pythagore.

Théorème 2.7. (Pythagore) *Soit E un espace vectoriel euclidien. Alors pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E, on a :*
$<\vec{u}, \vec{v}> = 0$ *si et seulement si* $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

Définition 2.8. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E. On dit qu'un vecteur $\vec{v} \in E$ est orthogonal à F si pour tout $\vec{u} \in F$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à F est appelé orthogonal de F et noté $F^{\perp}$.*

Proposition 2.9. *Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E, alors on a:*

1. *$F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E*
2. $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$
3. $E = F \oplus F^{\perp}$

Définition 2.10. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie n. On appelle base orthonormée (ou orthonormale) de E, toute base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ telle que pour tout indice i, $\|e_i\| = 1$ et $<e_i, e_j> = 0$ pour $i \neq j$.*

Si X est un espace affine euclidien de dimension n, un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, v_1, \cdots, v_n)$ de X est dit orthonormé (ou orthonormal) si $(v_1, \cdots, v_n)$ est une base orthonormée de $\vec{X}$.

On admettra le théorème suivant:

Théorème 2.11. *Pour tout espace vectoriel euclidien E de dimension finie n, il existe au moins une base orthonormée.*

Note: Ce théorème peut se démontrer par récurrence sur la dimension n $(n \geqslant 1)$.
On peut aussi s'appuyer sur le théorème d'existence de bases en dimension finie, se donner une base quelconque et à partir de celle-ci, construire une base orthonormée à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmitt.

2.2 Projections orthogonales, symétries orthogonales

2.2.1 Le cas vectoriel

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geqslant 1$, $F \subset E$ un sous-espace de E.
On a $E = F \oplus F^{\perp}$ et tout vecteur $\vec{u}$ de E s'écrit de manière unique $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1 \in F$ et $\vec{u}_2 \in F^{\perp}$.

La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée projection orthogonale sur F. Si on note p_F cette projection orthogonale, avec l'écriture ci-dessus du vecteur $\vec{u}$, on a $p_F(\vec{u}) = \vec{u}_1$.
On remarquera tout de suite que si $F = \{0_E\}$, on a $F^{\perp} = E$, $p_F = 0$ et si $F = E$, $F^{\perp} = \{0_E\}$, $p_F = \mathrm{Id}_E$.

Supposons que $\dim(F) = r$ avec $0 < r < n$. Si $(e_1, \cdots, e_r)$ est une base de F et $(e_{r+1}, \cdots, e_n)$ est une base de $F^{\perp}$, alors dans la base $(e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$ de E, la projection orthogonale p_F a pour matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où I_r est la matrice identité d'ordre r.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F, l'application linéaire $s_F\colon E \longrightarrow E$ qui au vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ associe le vecteur $s_F(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

Si $\dim(F) = n - 1 > 0$, on dit que F est un hyperplan (vectoriel) de E. Dans ce cas $F^{\perp}$ est une droite (vectorielle) et la symétrie orthogonale est appelée réflexion. Si $\dim(F) = r$ avec $0 < r < n$, supposons que $(e_1, \cdots, e_r)$ est une base de F et $(e_{r+1}, \cdots, e_n)$ est une base de $F^{\perp}$, alors dans la base $(e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$ de E, la matrice de s_F est de la forme $\begin{pmatrix} \boxed{I_r} & 0 \; \cdots \; 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\;-I_{n-r}\;} \end{pmatrix}$.

Remarque 2.12. Avec les notations et écritures précédentes, on a

1. $s_F^2 = s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_E$ (application involutive)
2. $(\mathrm{Id}_E + s_F) = 2p_F$ (donc $s_F = -\mathrm{Id}_E + 2p_F$)
3. $(\mathrm{Id}_E + s_F) \circ (\mathrm{Id}_E - s_F) = 0$

2.2.2 Le cas affine

Soient X un espace affine euclidien de dimension $n \geqslant 1$, $Z \subset X$ un sous-espace affine. Nous avons $\vec{X} = \vec{Z} \oplus \vec{Z}^{\perp}$.

Étant donné un point quelconque M de X, le sous-espace affine de X passant par M et de direction $\vec{Z}^{\perp}$ coupe Z en un point unique M' appelé projeté orthogonal de M sur Z. L'application linéaire associée à cette projection affine est la projection orthogonale vectorielle $p_{\vec{Z}}$.

Fixons maintenant un point O dans Z et notons $s_{\vec{Z}}$ la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à $\vec{Z}$. A tout point M dans X, associons le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = s_{\vec{Z}}(\overrightarrow{OM})$. Par définition, cette application $s_{O,Z}$ est affine, d'application linéaire associée $s_{\vec{Z}}$.
On peut montrer que pour tout autre point $O' \in Z$, on a $s_{O,Z} = s_{O',Z}$.

En effet, soit M'' l'unique point de X tel que $\overrightarrow{O'M''} = s_{\vec{Z}}(\overrightarrow{O'M})$. Par la relation de Chasles on a $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$. On en déduit par linéarité de $s_{\vec{Z}}$, que $\overrightarrow{O'M''} = s_{\vec{Z}}(\overrightarrow{O'O}) + s_{\vec{Z}}(\overrightarrow{OM})$. Comme $s_{\vec{Z}}(\overrightarrow{O'O}) = \overrightarrow{O'O}$, on obtient $\overrightarrow{O'M''} = \overrightarrow{O'O} + s_{\vec{Z}}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{O'M'}$, donc $M' = M''$. Ainsi l'application que nous avons définie est indépendante du point O choisi dans Z. Cette application est appelée symétrie orthogonale par rapport à Z.

On notera que si Z est réduit à un point, alors il s'agit d'une symétrie centrale et si Z est un hyperplan $(0 < \dim(Z) = \dim(X) - 1)$ il s'agit d'une réflexion (affine).