Université de Nice Sophia Antipolis

Licence L2 - Géométrie

Année 2014 - 2015 (Semestre 4)

Feuille de TD 2

Exercice 1. (intersection de deux plans affines dans un espace affine de dimension 4)
Soit X un espace affine de dimension 4. Que peut-on obtenir en intersectant deux plans affines non parallèles dans X?

Exercice 2. (théorème des milieux) Soient A, B, C trois points non alignés dans un plan affine $\mathcal{P}$ (de corps de base $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Montrer que les droites BC et IJ sont parallèles.

Exercice 3. (transitivité de la relation "être parallèle") Soient M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points d'un espace affine X de dimension au moins 2. On suppose que l'on ne peut extraire de ces quatre points, trois points alignés. On note I_1 le milieu de $[M_1M_2]$, I_2 le milieu de $[M_2M_3]$, I_3 le milieu de $[M_3M_4]$, I_4 le milieu de $[M_4M_1]$.

1. Montrer que les droites I_1I_2 et I_3I_4 sont parallèles.
2. Monter que $I_1I_2I_3I_4$ est un parallélogramme.
3. Faire un dessin illustratif pour le cas où (M_1, M_2, M_3, M_4) est un repère affine de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. (calculer dans un repère)
Dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 2y - 5 = 0$, les points A et B de coordonnées respectives $(2, -3)$ et $(3, -2)$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ définis par $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$.

1. Quelles sont les coordonnées du point B dans le repère $\mathcal{R}' = (A, \vec{u}, \vec{v})$?
2. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (A, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 5. (tracer dans un plan: une droite, un parallélogramme) Soit X est un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de X dans le repère $\mathcal{R}$ et on considère $\mathcal{P}$, le plan d'équation $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

1. Soient M_0 le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant M_0 et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Expliquer pourquoi la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.
2. Trouver sur le plan $\mathcal{P}$, quatre points non alignés A, B, C et D tels que $ABCD$ soit un parallélogramme (rappel: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

Exercice 6. (écrire une application affine dans un repère)
Soient A, B, C trois points non alignés dans un plan affine réel $\mathcal{P}$, $f \colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application affine définie par $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A$.

1. Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$?
2. Pour $M \in \mathcal{P}$, on note (x, y) les coordonnées de M dans le repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Donner, en fonction de (x, y), les coordonnées (x', y') de $f(M)$ dans ce même repère $\mathcal{R}$.
3. Que peut-on dire de $f^3 = f \circ f \circ f$?
4. Résoudre l'équation (d'inconnue M) $f(M) = M$ et placer la solution dans un dessin.

Exercice 7. (à la recherche d'un triangle dont les milieux sont fixés) A_1, A_2, A_3 sont trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On veut:

(∗) ***Trouver dans le plan*** $\mathcal{P}$***, un triangle*** $M_1M_2M_3$ ***tel que les points***

A_1, A_2**, et** A_3 ***soient respectivement les milieux des segments*** $[M_1M_2]$**,** $[M_2M_3]$ ***et*** $[M_3M_1]$**.**

1. Supposons que $M_1M_2M_3$ est un triangle répondant à la question (∗). Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$?

2. Soient $\mathcal{D}_1$ la parallèle à (A_2A_3) par A_1, $\mathcal{D}_2$ la parallèle à (A_3A_1) par A_2, $\mathcal{D}_3$ la parallèle à (A_1A_2) par A_3. $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes en A, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en B, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sécantes en C. Faire un dessin de la configuration et montrer que le triangle ABC répond à la question (∗).

3. Combien y a-t-il de triangles $M_1M_2M_3$ répondant à la question (∗)?

4. Expliquez comment répondre à la question (∗) en utilisant un repère.
