Université de Nice Sophia Antipolis

Licence L2 - Géométrie

Année 2014-2015 (Semestre 4)

Feuille de TD 3

Exercice 1. (nature de l'ensemble des points fixes d'une application affine)
Soient X un espace affine réel non vide de dimension finie, $f\colon X \longrightarrow X$ une application affine de partie linéaire $\vec{f}\colon \vec{X} \longrightarrow \vec{X}$.

1. On suppose que l'ensemble $\mathcal{F} = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ (ensemble des points fixes de f) n'est pas vide. On se donne alors un point $x_1 \in \mathcal{F}$.

   Montrer que x est un point fixe de f si et seulement si on a $\overrightarrow{x_1 x} = \vec{f}(\overrightarrow{x_1 x})$.
   En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de X de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{X}})$.

2. Fixant une origine x_0 dans l'espace affine X, montrer que l'égalité $f(x) = x$ équivaut à $(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{X}})(\overrightarrow{x_0 x}) = \overrightarrow{f(x_0)x_0}$. En déduire que si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, alors f admet un point fixe et un seul.

Exercice 2. (barycentres, applications affines) Soient A, B et C trois points distincts d'un espace affine X de dimension au moins 2. A tout point M de $\mathcal{P}$ on associe le point M', barycentre des points A, B, C, M affectés respectivement des coefficients 1, 1, 1 et -1. On définit ainsi une application $f\colon X \longrightarrow X$.

1. Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est un point fixe de f.

2. Montrer que f est une homothétie. Préciser le centre et le rapport de cette homothétie.

3. On suppose que X est un plan affine et que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   Faire un dessin et y placer les points A, B, C, $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(C)$.

Exercice 3. (encore des barycentres) Soient A, B et C trois points distincts d'un plan affine $\mathcal{P}$. À tout point M de $\mathcal{P}$ on associe le point M', barycentre des points A, B, C, M affectés respectivement des coefficients 1, -2, 1 et 2. On définit ainsi une application $f\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$.

Montrer que f est une translation (préciser le vecteur associé à translation). Faire un dessin et y placer les points A, B, C, $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$.

Exercice 4. (savoir composer deux homothéties affines) Soient A_1 et A_2 deux points distincts d'un espace affine réel X. On note h_1 l'homothétie de centre A_1 et de rapport $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, h_2 l'homothétie de centre A_2 et de rapport $\lambda_2 = 2$. Décrire les applications affines $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$. Que deviennent ces applications si $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\lambda_2 = 2$?

Exercice 5. (quand deux homothéties affines commutent-elles?) Soient X un espace affine réel non vide, h_1 et h_2 deux homothéties de X, de rapports différents de 0 et 1. Montrer que h_1 et h_2 commutent (c'est-à-dire $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$) si et seulement si h_1 et h_2 ont même centre.

Exercice 6. (Théorème de Desargues) Dans un espace affine X de dimension au moins 2, on considère deux triangles ABC, $A'B'C'$ sans sommet commun tels que

$$(AB)//(A'B'),\ (BC)//(B'C')\ \text{et}\ (AC)//(A'C').$$

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.
(Indication: utiliser une homothétie de centre le point de concours des droites (AA') et (BB') si celles-ci s'intersectent ou une translation sinon.)

Exercice 7. (qui sont les éléments de GA(X) dont la partie linéaire est $\mathrm{Id}_{\vec{X}}$?)
Rédiger (**pour vous-mêmes**) avec soin la preuve de l'énoncé suivant.

Énoncé: Soient X un espace affine non vide de corps de base K, $f\colon X \longrightarrow X$ une application affine. Alors f est une translation si et seulement si $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{X}}$.
