Université de Nice Sophia Antipolis

Licence L2 - Géométrie

Année 2014-2015 (Semestre 4)

Corrigés des exercices n°5 et n°8 de la feuille TD 1

Exercice 5

Soient A, B, C, D quatre points distincts et non tous alignés du plan affine usuel $\mathbb{R}^2$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

i. La droite (AB) est parallèle à la droite (CD) et la droite (AC) est parallèle à la droite (BD).

ii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

iii. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

iv. Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

Solution:

1. Remarquons tout de suite que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ en vertu de la règle du parallélogramme. ii. et iii. sont donc équivalents (**ii.** $\Longleftrightarrow$ **iii.**).

2. ii. implique "(AB) est parallèle à (CD)"; iii. implique "(AC) est parallèle à (BD)". Comme ii. et iii. sont équivalents, on en déduit que ii. implique i. (**ii.** $\Longrightarrow$ **i.**).

3. Montrons l'implication i.$\Longrightarrow$ii. : supposons $(AB)//(CD)$ et $(AC)//(BD)$. Il existe alors λ, μ des nombres réels tels que $\overrightarrow{CD} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD} = \mu\,\overrightarrow{AC}$. Remarquons que les quatre points n'étant pas tous alignés, l'hypothèse "$(AB)//(CD)$ et $(AC)//(BD)$" entraîne que les points A, B et C ne sont pas alignés (en effet l'alignement de A, B et C entraînerait l'alignement de A, B, C et D du fait que $(AB)//(CD)$).
   Nous allons montrer que dans les expressions $\overrightarrow{CD} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD} = \mu\,\overrightarrow{AC}$, $\lambda = 1$ et $\mu = 1$. Nous avons $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \lambda\,\overrightarrow{AB} - \mu\,\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{CB} = \lambda\,\overrightarrow{AB} - \mu\,\overrightarrow{AC}$.
   De même, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. Nous en déduisons que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB} - \mu\,\overrightarrow{AC}$.
   Les points A, B et C n'étant pas alignés, le système $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est libre et donc $\lambda = \mu = 1$.

   Nous venons ainsi de prouver que **i.$\Longleftrightarrow$ii.$\Longleftrightarrow$iii.**

4. Il ne nous reste plus qu'à prouver l'équivalence ii.$\Longleftrightarrow$iv.: notons I le milieu de $[AD]$, J le milieu de $[BC]$. Nous avons donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}$. En utilisant la relation de Chasles on peut écrire: $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JD}\right)$. Comme $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$, on a $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD}\right)$. L'égalité $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD}$ équivaut à $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BI}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI}$, ce qui signifie $I = J$.

Ces quatre conditions restent-elles équivalentes lorsque les points A, B, C et D sont alignés?

Solution: Lorsque les points A, B, C et D sont alignés on a iv.$\Longleftrightarrow$iii.$\Longleftrightarrow$ii.$\Longrightarrow$i. mais on n'a pas forcément i.$\Longrightarrow$ii.: il suffit de prendre sur une droite affine $\mathcal{D}$, quatre points distincts A, B, C et D tels que par exemple $\overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

Exercice 8

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
Soient A, B, C, D les quatre points de $\mathcal{E}$ ayant pour coordonnées respectivement

$$(1,1,1),\ (2,1,-1),\ (4,0,2) \text{ et } (1,2,3).$$

1. Après avoir vérifié que les points A, B et C ne sont pas alignés, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ engendré par ces trois points.

   Solution: les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est lié. Nous avons $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - 2\vec{w}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$. On voit tout de suite que l'équation $\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ admet pour seule et unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$.
   Conclusion: le système $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est libre, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
   Un point $M \in \mathcal{E}$ appartient au plan engendré par A, B et C si et seulement si le système $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est lié. Ce qui équivaut à $\det_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$.
   Notant (x, y, z) les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$, cela donne $\begin{vmatrix} (x-1) & 1 & 3 \\ (y-1) & 0 & -1 \\ (z-1) & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire (en développant par rapport à la première colonne),

   $$-2(x-1) - 7(y-1) - (z-1) = 0.$$

2. Soient $\vec{v_1} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v_2} = \vec{v} + \vec{w}$. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ passant par D et de direction engendrée par $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

   Solution: de manière analogue à la question précédente, un point M de coordonnées (x, y, z) appartient au plan $\mathcal{P}_2$ passant par D et de direction engendrée par $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ si et seulement si $\det_{(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}\left(\overrightarrow{DM}, \vec{v_1}, \vec{v_2}\right) = 0$, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} (x-1) & 1 & 0 \\ (y-2) & 1 & 1 \\ (z-3) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. On en déduit que $\mathcal{P}_2$ admet pour équation cartésienne,

   $$(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0.$$

3. Décrire l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

   Solution: on peut facilement vérifier que le système $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{v_1}\right)$ est libre, ce qui signifie $\overrightarrow{\mathcal{P}_1} \neq \overrightarrow{\mathcal{P}_2}$, donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite affine $\mathcal{D}$. Un point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées (x, y, z) vérifient le système linéaire suivant: $\left\{\begin{array}{rcr} x - y + z & = & 2 \\ -2x - 7y - z & = & -10 \end{array}\right.$. Une résolution de ce système montre que l'ensemble solution est décrit par les (x, y, z) de la forme $(x, y, z) = (8, 0, -6) + t(-8, 1, 9)$ où t est un réel quelconque. $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est donc la droite passant par le point M_0 de coordonnées $(8, 0, -6)$ et de vecteur directeur $-8\vec{u} + \vec{v} + 9\vec{w}$.

4. Soit Δ la droite passant par le milieu de $[AD]$ et de direction engendrée par $(\vec{u} - \vec{w})$. Décrire $\Delta \cap \mathcal{P}_1$ et $\Delta \cap \mathcal{P}_2$.

   Solution: notons I le milieu du segment $[AD]$. I a pour coordonnées $\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$.
   Une équation paramétrique de Δ est donnée par $(x, y, z) = \left(1, \frac{3}{2}, 2\right) + t(1, 0, -1)$.
   Ainsi, un point M de Δ, de coordonnées $\left(1+t, \frac{3}{2}, 2-t\right)$ appartient à $\mathcal{P}_1$ si et seulement si $-2(1+t) - 7\left(\frac{3}{2}\right) - (2-t) = -10$, c'est-à-dire $t = -\frac{9}{2}$. $\Delta \cap \mathcal{P}_1$ est donc le point de coordonnées $\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right)$. De même, un point M de Δ, de coordonnées $\left(1+t, \frac{3}{2}, 2-t\right)$ appartient à $\mathcal{P}_2$ si et seulement si $(1+t) - \frac{3}{2} + (2-t) = 2$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} = 0$. $\Delta \cap \mathcal{P}_2$ est donc vide. La droite Δ est faiblement parallèle à $\mathcal{P}_2$.