Résumé de la séance du 27 janvier 2010

J. YAMEOGO

Corollaire 1.9. *Soient* $[a, b]$ *($a \neq b$) un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^n$ *et admettant une dérivée d'ordre* $(n+1)$ *sur* $]a, b[$*. On suppose qu'il existe* $M \in [0, +\infty[$ *tel que pour tout* $x \in]a, b[$*,* $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$*.*

Alors on a $\left| f(b) - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i \right| \leqslant M \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

Exemple 1.10. Prenons $a=0$, $b=1$, $n=5$ et $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x)=e^x$.
Quel que soit l'entier naturel i, on a $f^{(i)}(x)=e^x$. La fonction $x \mapsto e^x$ est grossièrement majorée par 3 sur $[0,1]$: pour tout $x \in [0,1]$, $0 < e^x < 3$. On a donc par exemple l'inégalité suivante:

$$\left| e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right| \leqslant 3 \times \frac{1}{6!} = \frac{1}{240}.$$

On en déduit par exemple que $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60}$ est une valeur approchée de e à $\frac{1}{240} \approx 0,0042$ près. En fait on a $\left| e - \frac{163}{60} \right| < \frac{2}{1000}$.

Théorème 1.11. **(Taylor-Young)** *Soient* $x_0 \in \mathbb{R}$*,* n *un entier naturel non nul et* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n-1}$ *au voisinage de* x_0*. On suppose que* $f^{(n)}(x_0)$ *existe. Alors il existe une fonction* $\varepsilon\colon x \mapsto \varepsilon(x)$ *définie au voisinage de* x_0 *telle que* $\lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ *et vérifiant la formule*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + (x-x_0)^n \times \varepsilon(x).$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Young.

Si on pose $h = x - x_0$*, la formule de Taylor-Young s'écrit:*

$$f(x_0+h) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i + h^n \varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 .$$

Définition 1.12. *Soient* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction définie au voisinage de* x_0 *et telle que les dérivées successives* $f'(x_0), \ldots, f^{(i)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ *existent. On appelle* ***développement de Taylor à l'ordre*** n ***de*** f ***en*** x_0*, la fonction polynomiale* $T_n(f, x_0)$ *définie au voisinage de* x_0

par $T_n(f, x_0)(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$

Exemple 1.13. Soit $f\colon \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}}$.
Calculons le développement de Taylor à l'ordre 2 de f en $x_0 = 0$.
Solution: la fonction f est indéfiniment dérivable au voisinage de 0 et on a:
$f'(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}}$, $f''(x) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times (1+x)^{-\frac{7}{4}}$. D'où $f(0)=1$, $f'(0) = \frac{1}{4}$, $f''(0) = -\frac{3}{16}$.
Le développement de Taylor à l'ordre 2 de f en $x_0 = 0$ est donc $T_2(f,0)(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2$.

1.2 Développements limités

Définition 1.14. *Soit* f *une fonction réelle de la variable réelle* x*, définie au voisinage d'un point* x_0*. On dit que* f *admet un* ***développement limité d'ordre*** n ***en*** x_0 $(n \in \mathbb{N})$*, s'il existe un* ***polynôme*** P_n *de degré au plus* n *et une fonction* ε *définie au voisinage de* x_0 *tels que:*

$f(x) = P_n(x) + (x-x_0)^n \times \varepsilon(x)$*, avec* $\lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Autrement dit, f *admet un développement limité d'ordre* n *en* x_0*, si on peut trouver un polynôme* P_n *de degré au plus* n *tel que* $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Exemple 1.15. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0, la formule de Taylor-Young donne un développement limité de f en x_0. Ainsi, un développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est donné par $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x)$, où $\lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Théorème 1.16. **(unicité du développement limité)** *Soit* f *une fonction admettant un développement limité d'ordre* n *en le point* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Si* P_n *et* Q_n *sont des polynômes de degré au plus* n *tels que* $f(x) = P_n(x) + (x-x_0)^n \times \varepsilon(x-x_0)$ *et* $f(x) = Q_n(x) + (x-x_0)^n \times \varepsilon(x-x_0)$*, alors on a* $P_n = Q_n$ *.*

Définition 1.17. *Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, le polynôme P_n tel que $f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x - x_0)$ est appelé partie régulière du développement limité d'ordre n de f en x_0 et $(x - x_0)^n \times \varepsilon(x - x_0)$ est le reste correspondant.*

Remarque 1.18. (A RETENIR) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ ($n \geqslant 1$) au voisinage de x_0 telle que $f^{(n)}(x_0)$ existe, alors la formule de Taylor-Young fournit le développement limité de f à l'ordre n en x_0:

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + (x - x_0)^n \times \varepsilon(x)}.$$

Note 1.19. A partir de la définition on peut vérifier que:

1. si f, définie au voisinage de x_0 admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors f est continue en x_0,
2. si f admet un développement limité d'ordre n avec $n \geqslant 1$ en x_0, alors f est dérivable en x_0.

Note 1.20. (les notations o (petit o) et O (grand o))

1. Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est un "petit o de g" et on écrit $f = o(g)$ au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $f(x) = g(x) \times \varepsilon(x)$.
   On notera que si pour $x \neq x_0$, on a $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0, dire que $f = o(g)$ c'est dire que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On dit aussi que la fonction g est prépondérante sur la fonction f au voisinage de x_0.

   Quelques exemples:

   a) Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = 0$, on a $f = o(1)$ au voisinage de x_0.

   b) Au voisinage de $x_0 = 0$ on a par exemple $\ln(1 + x) = o(1)$, $x e^x = o(1)$, $x^2 + 10^{10}x^5 = o(x)$, $\sqrt{1 + x} - 1 - \frac{1}{2}x = o(x)$, si $n_1 < n_2$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$), $x^{n_2} = o(x^{n_1})$.

2. Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est un "grand o de g" et on écrit $f = O(g)$ au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ψ définie au voisinage de x_0 telle que ψ est bornée au voisinage de x_0 et $f(x) = g(x) \times \psi(x)$.
   Si pour $x \neq x_0$, on a $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0, dire que $f = O(g)$ c'est dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant M$ au voisinage de x_0 .

   Quelques exemples:

   a) $e^x - 1 - x = O(x^2)$ au voisinage de 0. En effet, pour $x \in [-1, 1]$ (par exemple), si nous écrivons la formule de Mac-Laurin à l'ordre 2 pour la fonction $t \mapsto e^t$ sur l'intervalle $[0, x]$, nous obtenons $e^x = 1 + x + \frac{e^\theta}{2!}x^2$, avec $|\theta| < |x|$, d'où $\left|\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}\right| = \left|\dfrac{e^\theta}{2}\right| \leqslant \dfrac{e}{2}$.

   b) $\sqrt{1 + x} - 1 - \frac{1}{2}x = O(x^2)$ au voisinage de 0.