Résumé de la 1ère partie de la séance du 10 février 2010

J. YAMEOGO

1.4 Etude de graphe au voisinage d'un point

Soit f une fonction réelle admettant un DL à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$ donné par $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$. Nous savons que la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ admet pour équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

Pour déterminer la position du graphe de f par rapport à la tangente en $(x_0, f(x_0))$ au voisinage de ce point, on étudie le signe de la différence $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$.

Théorème 1.29. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert contenant le point $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ en x_0, de partie régulière*

$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$.

On suppose que les coefficients a_i $(i \geqslant 2)$ ne sont pas tous nuls. Dans ces conditions, soit k le plus petit des entiers i compris entre 2 et n tel que $a_i \neq 0$. Alors pour x assez proche de x_0, la diffrénce $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ a même signe que l'expression $a_k(x - x_0)^k$.

1. *Si **k est pair et $a_k > 0$**, alors au voisinage du point $M_0 = (x_0, f(x_0))$, le graphe de f est au dessus de la tangente en ce point. En particulier si x_0 est un point critique de f $(f'(x_0) = 0)$, $f(x_0)$ est un minimum local de f.*
2. *Si **k est pair et $a_k < 0$**, alors au voisinage du point $M_0 = (x_0, f(x_0))$, le graphe de f est en dessous de la tangente en ce point. En particulier si x_0 est un point critique de f $(f'(x_0) = 0)$, $f(x_0)$ est un maximum local de f.*
3. *Si **k est impair**, alors au voisinage du point $M_0 = (x_0, f(x_0))$, la tangente traverse le graphe de f en ce point. M_0 est du type point d'inflexion et le signe de l'expression $a_k(x - x_0)^k$ n'est pas constant.*

Exercice 1.2. Pour chacune des situations 1., 2. et 3. du théorème 1.29 ci-dessus, faire des dessins illustrant l'allure du graphe de f (par rapport à la tangente) au voisinage du point $(x_0, f(x_0))$.

1.5 DL d'ordre 2 pour une fonction de deux variables

Théorème 1.30. *Soit $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables réelles, définie au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, alors il existe une fonction ε définie au voisinage de (x_0, y_0) telle que:*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times (x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \times (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \times (y - y_0)^2\right) + \|(x - x_0, y - y_0)\|^2 \varepsilon(x, y)$$

avec $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \boldsymbol{\varepsilon(x, y) = 0}$.

Note 1.31. Soit $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) est donnée par

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0).$$

Le nombre $D(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2$ est appelé hessien de f en (x_0, y_0).
Si (x_0, y_0) est un point critique de f et si le hessien de f en (x_0, y_0) n'est pas nul, alors son signe permet de déterminer la nature du point critique (x_0, y_0).

Théorème 1.32. *Soit $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et admettant (x_0, y_0) pour point critique.*
Soit $D(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2$ *le hessien de f en (x_0, y_0).*

1. *Si $D(x_0, y_0) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0)*
2. *Si $D(x_0, y_0) > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0)*
3. *Si $\boldsymbol{D(x_0, y_0) < 0}$, alors (x_0, y_0) est un **point critique de type selle**.*
   Le plan tangent (d'équation $z = f(x_0, y_0)$) traverse la surface d'équation $z = f(x, y)$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Exercice 1.3. Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{f(x, y) = xy(3 - x - y)}$.

1. Donner une équation du plan tangent P à la surface S d'équation $z = f(x, y)$ en $(1, 1, 1)$.
2. Etudier la position du plan tangent P par rapport à S au voisinage de $(1, 1, 1)$.