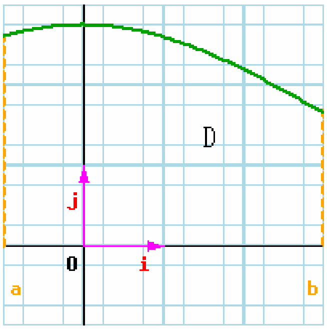
Chapitre 2
Intégration: fonction réelle d'une variable réelle.

2.1 Intégrale simple

Dans ce paragraphe, on va donner un aperçu de la définition formelle d'une fonction intégrable. Pour commencer, voici comment on approxime une aire avec des rectangles.



Soient f une fonction **continue et positive** définie sur un intervalle $[a,\, b]$ $(a < b)$, D le domaine compris entre le graphe de f et les droites d'équations $x = a,\ x = b,\ y = 0$:
$D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leqslant x \leqslant b,\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$. L'aire $\mathcal{A}$ de D peut être approximée de la manière suivante:

- On considère une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$. Le nombre $h = \max\left\{(x_i - x_{i-1})\right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est appelé pas de la subdivision. La subdivision est dite régulière si on a $h = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ quel que soit $i: 1 \leqslant i \leqslant n$.
- Pour une telle subdivision, on prend sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i[$ $(i \geqslant 1)$ un point quelconque c_i et on considère le rectangle R_i de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur $f(c_i)$ (rappelons que f est positive).
  Le rectangle R_i a pour aire $\mathcal{A}_i = f(c_i) \times (x_i - x_{i-1})$.
- La somme des aires des rectangles R_i est $I_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$.
  I_n est une approximation de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D. Pour simplifier, prenons la subdivision régulière. Intuitivement, plus n sera grand (i.e. plus notre subdivision sera fine), plus I_n s'approchera de l'aire de D. **La somme I_n est appelée somme de Riemann** (célèbre mathématicien allemand du 19ème siècle: 1826-1866).

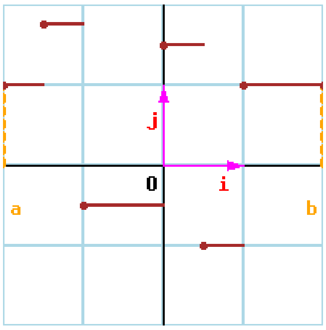
On peut prouver le théorème suivant (que nous admettrons):

Théorème 2.1. *Avec les notations et hypothèses précédentes, on a:* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = \mathcal{A}$

Remarque 2.2. Nous aurions pu approximer l'aire du domaine D en utilisant les aires des trapèzes T_i de sommets $(x_{i-1}, 0), (x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i)), (x_i, 0)$: on a $\text{aire}(T_i) = \dfrac{(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \times (x_i - x_{i-1})}{2}$.

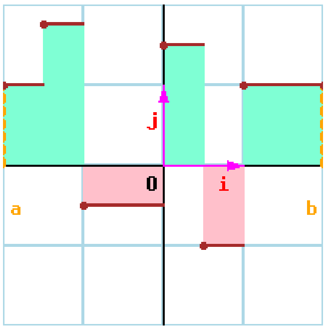
Définition 2.3. (Intégrale définie d'une fonction en escalier)

- *Une fonction* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *est dite en escalier s'il existe une subdivision* $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ $(n\geqslant 1)$ *telle que* f *est constante sur chaque intervalle* $]x_{i-1},x_i[$ $(1\leqslant i\leqslant n)$.



- *L'intégrale (définie) sur* $[a,b]$ *d'une fonction en escalier* f *est la somme* ***algébrique*** *des aires des rectangles* R_i *de base* $[x_{i-1},x_i]$ *et de hauteur* $|f(c_i)|$ *pour* $c_i\in]x_{i-1},x_i[$.

  Cette somme est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$.



(L'aire d'un rectangle situé au dessus de l'axe des abscisses sera comptée positivement, tandis que celle d'un rectangle situé en dessous de l'axe des abscisses sera comptée négativement)