Résumé de la séance du 24 février 2010

J. YAMEOGO



**Définition 2.4. (Intégrabilité au sens de Riemann)** *Une fonction réelle* $f\colon [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite intégrable sur* $[a,b]$, *si*

$\forall \epsilon > 0, \exists f_1,\, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonctions en escaliers telles que:*

1. $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$ *(i.e.* $\forall x \in [a,b],\, f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$*)*
2. $\left| \int_a^b f_2(x)\mathrm{dx} - \int_a^b f_1(x)\mathrm{dx} \right| < \epsilon$

**Théorème 2.5. (Intégrale définie)** *On suppose que la fonction réelle* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable sur* $[a,\, b]$. *Considérons alors une subdivision régulière* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ $(n \geqslant 2)$ *de pas* $h = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *et posons* $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,(x_i - x_{i-1})$.

*Alors la suite réelle de terme générale* $I_n$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *et sa limite, notée* $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ *est appelée intégrale définie de* $f$ *sur* $[a,b]$.

Dans ce cours nous nous intéresserons essentiellement aux fonctions continues et aux fonctions continues par morceaux, définies sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

**Définition 2.6.** *On dit que la fonction* $f\colon\, [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue par morceaux si* $f$ *est bornée et l'ensemble des points de discontinuité de* $f$ *est de cardinal fini.*

Nous admettrons et utiliserons souvent le théorème suivant:

**Théorème 2.7.** *Soit* $[a,b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$. *Alors toute fonction continue* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable sur* $[a,b]$.

**Note 2.8.** Dans l'expression $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$, $a$ et $b$ sont les bornes d'intégration, $x$ est la variable d'intégration; c'est une variable muette. Elle peut donc être remplacée par toute autre variable, à l'exception de celles des bornes d'intégration et bien sûr de la variable utilisée pour nommée la fonction. Ainsi, si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a,b]$, on a les égalités suivantes:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f(t)\mathrm{dt} = \int_a^b f(u)\mathrm{du} = \int_a^b f(v)\mathrm{dv} = \int_a^b f(y)\mathrm{dy}.$$

## 2.2 Quelques propriétés des intégrales définies

On suppose dans la liste des propriétés ci-dessous que $[a,\, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $f$ et $g$ sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$.

1. Quand les bornes d'intégration sont confondues: $\boxed{\int_a^a f(x)\mathrm{dx} = 0}$
2. La relation de Chasles: $\boxed{\forall c \in [a,b],\quad \int_a^c f(x)\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\mathrm{dx}}$
3. Quand on permute les bornes d'intégration: $\boxed{\int_b^a f(x)\mathrm{dx} = -\int_a^b f(x)\mathrm{dx}}$
4. La linéarité:
   i. $\boxed{\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\mathrm{dx} + \int_a^b g(x)\mathrm{dx}}$
   ii. $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \int_a^b (\lambda f)(x)\mathrm{dx} = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{dx}}$
5. Quand le graphe d'une des fonctions est toujours au dessus de l'autre:
   $\boxed{\text{Si } f \leqslant g \text{ sur } [a,b],\ \text{ alors } \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{dx}}$

6. Comparaison de la valeur absolue de l'intégrale et de l'intégrale de la valeur absolue:
$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{dx}\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{dx}}$$

## 2.3 Primitives: calcul d'intégrales définies

Souvent, dans la pratique, calculer une intégrale définie se ramènera pour nous, à chercher une primitive pour la fonction à intégrer.

**Définition 2.9.** *Soit $f$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On appelle primitive de $f$, toute fonction dérivable $F$ définie sur $[a, b]$ et vérifiant $F' = f$.*

**Exemple 2.10.**

- Sur l'intervalle $[-2, 3]$, la fonction $F$ définie par $F(x) = -\cos(x)$ est une primitive de la fonction $f$ définie sur $[-2, 3]$ par $f(x) = \sin(x)$.
- Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f$: $x \mapsto -x$; la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 7$ en est une autre.

**Théorème 2.11.** *Si la fonction $f$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive $F$, alors les primitives de $f$ sont toutes les fonctions $G$ de la forme $G = F + \lambda$ pour $\lambda$ parcourant $\mathbb{R}$.*

**Corollaire 2.12.** *Soient $f$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle supposée admettre une primitive $F$, $x_0 \in [a, b]$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une et une seule primitive de $f$ prenant la valeur $y_0$ en $x_0$.*

**Exemple 2.13.** Soit $f$: $[-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x$. $f$ admet une unique primitive $F$, prenant la valeur 3 en 1. Pour déterminer $F$, on écrit que toute primitive de $f$ est de la forme $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \lambda$ où $\lambda$ est une constante réelle. La condition $F(1) = 3$ fixe la valeur de la constante $\lambda$. $F(1) = 3$ si et seulement si $\lambda = \frac{7}{2}$. Conclusion: $F(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 7)$.

**Note 2.14.** Une primitive (quelle qu'elle soit) de $f$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi appelée intégrale indéfinie de $f$ et est notée $\int f(x)\mathrm{dx}$ (noter l'absence de bornes).

**Remarque 2.15. (conséquence de la linéarité de la dérivation)**

1. Pour deux fonctions $f, g$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si $F$ et $G$ sont des primitives respectives de $f$ et $g$, alors la somme $(F + G)$ est une primitive de $(f + g)$.
2. Si $f$ est une primitive de $f$, alors pour tout réel $\lambda$, $(\lambda F)$ est une primitive de $(\lambda f)$.

**Théorème 2.16. (théorème de la moyenne)** *Soit $f$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$.*
(Le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ est la moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[a, b]$).

En utilisant le théorème de la moyenne on peut prouver le théorème fondamental suivant:

**Théorème 2.17.** *Soit $f$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Etant donné un point $x_0 \in [a, b]$, l'application $F$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\mathrm{dt}$ est une primitive de $f$. Cette primitive s'annule en $x_0$.*

Dans la pratique, c'est le corollaire suivant que l'on applique pour calculer l'intégrale définie d'une fonction dont on connaît une primitive.

**Théorème 2.18.** *Soit $f$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Si $F$ est une primitive de $f$, alors on a $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b) - F(a)$.*

## 2.4 Techniques d'intégration

Dans ce paragraphe, on décrit les techniques de base à maîtriser pour mener à bien le calcul d'une intégrale définie.

### 2.4.1 Primitives de fonctions usuelles

La liste de primitives de fonctions usuelles à connaître:

| **Primitives de quelques fonctions usuelles ($\lambda$ est une constante réelle)** |
|---|
| 1) pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, on a $\displaystyle\int x^{\alpha} \mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$ |
| 2) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \mathrm{dx} = \ln\lvert x\rvert + \lambda$ |
| 3) pour $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, on a $\displaystyle\int e^{\alpha x} \mathrm{dx} = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + \lambda$ |
| 4) pour un réel $a$ strictement positif et différent de 1, $\displaystyle\int a^{x} \mathrm{dx} = \frac{a^{x}}{\ln(a)} + \lambda$ |
| 5) $\displaystyle\int \sin(x) \mathrm{dx} = -\cos(x) + \lambda$ |
| 6) $\displaystyle\int \cos(x) \mathrm{dx} = \sin(x) + \lambda$ |

### 2.4.2 Technique d'intégration par parties

La technique d'intégration par parties est fondée sur la formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables: $\boxed{(u \times v)' = u' \times v + u \times v'}$.

**Théorème 2.19.** *Soient u et v deux fonctions réelles continûment dérivables (i.e. des fonctions dérivables et dont les dérivées sont continues) sur un intervalle I.*
*Alors la fonction réelle produit* $\boldsymbol{u' \times v}$ *admet une primitive sur I et on a:*

1. $$\boxed{\int (u' \times v)(x) \mathrm{dx} = (u \times v)(x) - \int (u \times v')(x) \mathrm{dx}}$$
2. *si a et b sont deux points de I,*
$$\boxed{\int_a^b (u' \times v)(x) \mathrm{dx} = [(u \times v)(x)]_a^b - \int_a^b (u \times v')(x) \mathrm{dx}}$$
(dans cette formule, $[(u \times v)(x)]_a^b$ désigne $(u(b) \times v(b) - u(a) \times v(a))$)

**Exemple 2.20.**

1. Calculer une primitive de la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x e^{\alpha x}$ où $\alpha$ est un nombre réel non nul.
   Solution:
   a) On pose $u'(x) = e^{\alpha x}$ et $v(x) = x$, ce qui donne par exemple $u(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ en utilisant les formules des primitives des fonctions usuelles. On a $v'(x) = 1$.
   b) En utilisant le a) et la technique d'intégration par parties, on obtient:
   $$\int x e^{\alpha x} \mathrm{dx} = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \int 1 \times \left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right) \mathrm{dx}.$$
   On en déduit $\displaystyle\int x e^{\alpha x} \mathrm{dx} = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + \lambda$, où $\lambda$ est une constante réelle quelconque.
2. Calculer une primitive de la fonction $f: ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$.
   Solution: on pose $u'(x) = 1,\ v(x) = \ln(x)$, d'où $u(x) = x,\ v'(x) = \dfrac{1}{x}$ et alors
   $\displaystyle\int \ln(x) \mathrm{dx} = x \ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} \mathrm{dx} = x \ln(x) - \int \mathrm{dx}$, ce qui donne
   $\displaystyle\int \ln(x) \mathrm{dx} = x \ln(x) - x + \lambda$ où $\lambda$ est une constante réelle quelconque.