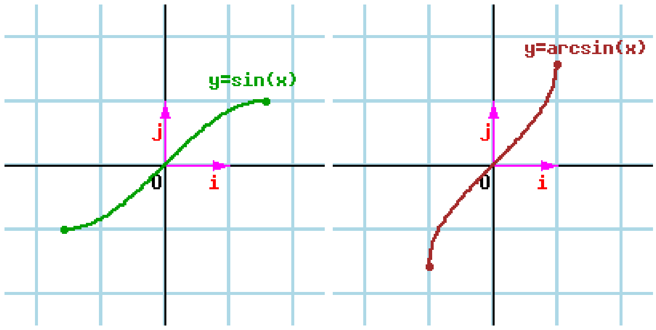
Résumé de la séance du 10 mars 2010

J. YAMEOGO

2.4.4 Compléments (fonctions trigonométriques inverses)

I. **La fonction arcsin:** la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est monotone (strictement croissante) sur l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On définit alors son inverse, $\arcsin\colon [-1,1] \longrightarrow [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto \arcsin(x)$.
Il faut retenir que:

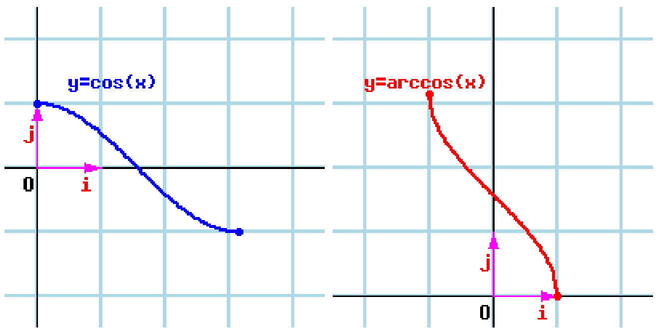
1. le **domaine de définition** de la fonction arcsinus est $\mathbf{[-1,1]}$
2. $\boldsymbol{y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow \left(\sin(y) = x \text{ et } \frac{-\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)}$



Les graphes de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
En utilisant les règles de dérivation de fonctions composées, on montre que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\boldsymbol{(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

II. **La fonction arccos:** la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est monotone (strictement décroissante) sur l'intervalle $[0,\pi]$. On définit son inverse, $\arccos\colon [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$, $x \mapsto \arccos(x)$.
Il faut retenir que:

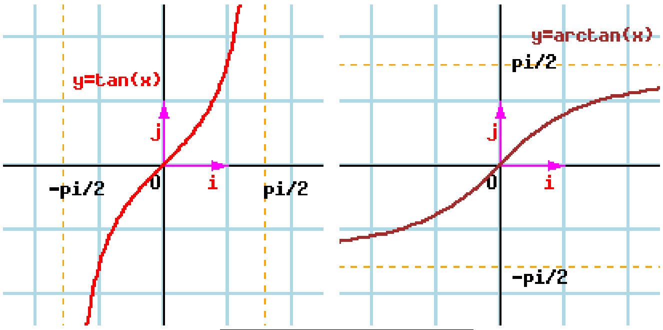
1. le **domaine de définition** de la fonction arccos est $\mathbf{[-1,1]}$
2. $\boldsymbol{y = \arccos(x) \Longleftrightarrow (\cos(y) = x \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi)}$



Les graphes de ces deux fonctions se déduisent l'un de l'autre par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.
En utilisant les règles de dérivation de fonctions composées, on montre que la fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\boldsymbol{(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

III. **La fonction arctan:** la fonction tangente est monotone (strictement croissante) sur l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. L'image de l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction inverse (ou encore réciproque) déduite est la fonction
arctan: $\boldsymbol{\mathbb{R} \longrightarrow]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$. Ce qu'il faut retenir:

1. Le **domaine de définition** de arctan est $\mathbb{R}$
2. $\boldsymbol{y = \arctan(x) \Longleftrightarrow \left(\tan(y) = x \text{ et } \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)}$



arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\boxed{\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}}$.

IV. **Complément à la liste des primitives des fonctions usuelles:**
λ désignant une constante réelle quelconque, nous avons:

1. $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin(x) + \lambda}$
2. $\boxed{\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan(x) + \lambda}$

2.5 Intégrales impropres - Définitions et exemples

Une généralisation de la notion d'intégrale définie.

2.5.1 Intégrales (impropres) sur un intervalle non borné

Définition 2.28. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $f\colon [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $b \geqslant a$, f est intégrable sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$.*

On pose alors par définition $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. L'expression $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x}$ ***est appelée intégrale impropre de f*** *sur $[a,+\infty[$.*

Si $\lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existe et est un nombre réel, alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est dite convergente.

Si $\lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ n'existe pas ou est infinie, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est dite divergente

Exemple 2.29.

1. $f\colon [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
   Pour $b \in [1,+\infty[$, on a f continue sur $[1,b]$ et $\int_1^b f(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$.
   On en déduit $\lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$, donc $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
2. $f\colon [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   On a, pour $b \geqslant 1$, $\int_1^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[\ln(x)\Big]_1^b = \ln(b)$. Comme $\lim_{b \longrightarrow +\infty} \ln(b) = +\infty$, on en déduit que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ diverge.
3. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(x)\mathrm{d}x$ diverge.
   En effet $\int_0^b \cos(x)\mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_0^b = \sin(b)$ et $\lim_{b \longrightarrow +\infty} \sin(b)$ n'existe pas.

Définition 2.30. *Soient $b \in \mathbb{R}$ et $f\colon]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle $[a,b]$, $(a < b)$. De manière analogue à la définition 2.28, on pose par définition $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \longrightarrow -\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.*
***L'intégrale impropre** $\boldsymbol{\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x}$ est dite convergente si $\lim_{a \longrightarrow -\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existe dans $\mathbb{R}$, elle est dite divergente sinon.*

Exemple 2.31. Calcul de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2}\mathrm{dx}$.

Pour $a<0$, on a $\int_{a}^{0} -xe^{-x^2}\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_a^0=\frac{1}{2}-\frac{e^{-a^2}}{2}$.

Comme $\lim_{a\longrightarrow-\infty} e^{-a^2}=0$, on en déduit que $\int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}$.

Définition 2.32. *Soit $f{:}\,]-\infty,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$. On suppose f intégrable sur tout fermé borné $[a,b]$.*
On définit l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)}\mathbf{dx}$ *de f sur $]-\infty,+\infty[$ comme suit:*

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *est dite convergente s'il existe un point $c\in\,]-\infty,+\infty[$tel que les deux intégrales impropres* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{dx}$ *et* $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *convergent. Dans ce cas* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *a pour valeur* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{dx}+\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$*:*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)}\mathbf{dx}=\int_{-\infty}^{c} \boldsymbol{f(x)}\mathbf{dx}+\int_{c}^{+\infty} \boldsymbol{f(x)}\mathbf{dx}.$$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *est dite divergente s'il existe un point $c\in\,]-\infty,+\infty[$tel que l'une au moins des intégrales impropres* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{dx}$, $\int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *diverge. Dans ce cas,* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *n'a pas de valeur.*

Exemple 2.33. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx}$ converge vers π car $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ et $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx}$ converge aussi vers $\frac{\pi}{2}$. En effet, pour $\alpha<0$, on a $\int_{\alpha}^{0} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx}=\left[\arctan(x)\right]_\alpha^0=-\arctan(\alpha)$. Comme (par définition de **arctan**) $\lim_{\alpha\longrightarrow-\infty} \arctan(\alpha)=-\frac{\pi}{2}$, on en déduit le résultat.

2.5.2 Intégrale impropre pour une fonction non bornée

Définition 2.34. *Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $(a<b)$, $f{:}\,[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$ non bornée telle que pour tout $\beta\in[a,b[$, f est intégrable sur $[a,\beta]$.*
On définit l'intégrale impropre de f sur $[a,b]$ en posant $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{dx}=\lim_{\beta\longrightarrow b^-}\int_{a}^{\beta} f(x)\mathrm{dx}$. *De manière analogue, pour $g{:}\,]a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ non bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha,b]$ $(a<\alpha\leqslant b)$, on pose* $\int_{a}^{b} g(x)\mathrm{dx}=\lim_{\alpha\longrightarrow a^+}\int_{\alpha}^{b} g(x)\mathrm{dx}$.

Les intégrales impropres $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{dx}$ *et* $\int_{a}^{b} g(x)\mathrm{dx}$ *sont dites convergentes si* $\lim_{\beta\longrightarrow b^-}\int_{a}^{\beta} f(x)\mathrm{dx}$ *et* $\lim_{\alpha\longrightarrow a^+}\int_{\alpha}^{b} g(x)\mathrm{dx}$ *existent dans $\mathbb{R}$; elles sont dites divergentes sinon.*

Exemple 2.35. Convergence de l'intégrale impropre $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}$.

Pour $\alpha\in]0,1]$, on a $\int_{\alpha}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}=\left[2\sqrt{x}\right]_\alpha^1=2-2\sqrt{\alpha}$.

Comme $\lim_{\alpha\longrightarrow0}\sqrt{\alpha}=0$, on a que $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}$ converge vers la valeur 2.

Définition 2.36. *La définition précédente se généralise comme suit:*
soit $f{:}\,]a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha,\beta]\subset]a,b[$.

- *On dit que l'intégrale impropre* $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{dx}$ *converge s'il existe $c\in]a,b[$ tel que les deux intégrales impropres* $\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{dx}$ *et* $\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{dx}$ *convergent. Dans ce cas, la valeur de* $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{dx}$ *est* $\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{dx}+\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{dx}$.
- *On dit que l'intégrale impropre* $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{dx}$ *diverge s'il existe $c\in]a,b[$ tel que l'une au moins des deux intégrales impropres* $\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{dx}$, $\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{dx}$ *diverge.*