

FEUILLE TD N°5 - semaine du 29 mars 2010

Exercice 1. (vérifier qu'une fonction est bien définie et calculer une intégrale)

On considère dans \mathbb{R}^2 le rectangle $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$ et la fonction $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x - y}$.

- Montrer que f est bien définie et continue sur R .
- Calculer l'intégrale double $I = \iint_R f(x, y) dx dy$.

Exercice 2. (intégrer un monôme sur un rectangle) Soient m, n deux entiers naturels, a, b , deux réels strictement positifs. Exprimer l'intégrale suivante en fonction de m, n, a et b :

$$\int_0^a \int_0^b x^m y^n dx dy \quad (\text{on suppose } 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq b).$$

Exercice 3. (intégrer $f_1(x) \times f_2(y)$ ou $(f_1(x) + f_2(y))$ sur un rectangle) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$ et $c < d$. On considère $f_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues, admettant pour primitives respectives F_1 et F_2 .

Sur le rectangle $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, on considère les fonctions

$$\begin{aligned} f: R &\rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x, y) = f_1(x) \times f_2(y) \\ &\text{et} \\ g: R &\rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } g(x, y) = f_1(x) + f_2(y). \end{aligned}$$

Calculer les intégrales suivantes en fonction de F_1, F_2, a, b, c et d :

$$I_1 = \iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{et} \quad I_2 = \iint_R g(x, y) dx dy.$$

Exercice 4. (pour vérifier que l'on a compris l'exercice précédent)

- Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{2x}{3}\right) dx$ et $\int_1^3 x^2 dx$.
- Soit $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq y \leq 3\}$, calculer $\iint_R y^2 \sin\left(\frac{2x}{3}\right) dx dy$.

Exercice 5. (dessiner un domaine et calculer une intégrale double)

Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 compris entre les droites d'équations $x = 1$, $x = 4$ et les deux paraboles d'équations respectives $y = (x - 2)^2 - 4$, $y = -(x - 3)^2 + 4$. On considère sur D la fonction f définie par $f(x, y) = x + 2y$. Dans un repère orthonormé du plan, dessiner le domaine D et calculer l'intégrale $I = \iint_D f(x, y) dx dy$
