Il est important de bien rédiger

Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2009/2010

**1ère SESSION - 2ème Semestre**
**Filière Eco-Gestion**
**Première Année de Licence (L1)**
**Mathématiques 2 - Unité U5**
**Enseignant: YAMEOGO J.**

# CORRIGÉ SUCCINCT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES (LES ÉNONCÉS SONT EN BLEU - DURÉE: 1H 30)

---

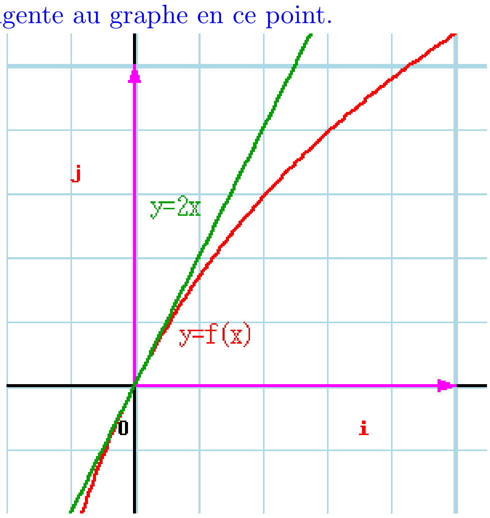
**Exercice 1.** (8 points) On considère $f_1$, $f_2$ et $f$ les trois fonctions réelles données par $f_1(x) = \ln(1+2x)$, $f_2(x) = \sqrt{1-x}$ et $f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$.

1. Quels sont les domaines de définition respectifs des fonctions $f_1$, $f_2$ et $f$?
   Solution: le domaine de définition de $f_1$ est l'ensemble des nombres réels $x$ tels que $1+2x>0$; $f_1$ a donc pour domaine l'intervalle ouvert $D_1 = ]-\frac{1}{2}, +\infty[$. $f_2(x)$ est bien définie si et seulement si $1-x \geqslant 0$; $f_2$ a donc pour domaine $D_2 = ]-\infty, 1]$. $f$ étant le produit de $f_1$ et $f_2$, cette fonction aura pour domaine, l'intersection de $D_1$ et $D_2$. Le domaine de définition de $f$ est donc $]-\frac{1}{2}, 1]$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 0$ pour chacune des fonctions $f_1$, $f_2$ et $f$.
   Solution: en utilisant la formule de Taylor-Young, on trouve: $f_1(x) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$; $f_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$. Pour calculer le développement limité de $f$, on utilise le fait que la partie régulière de ce développement limité s'obtient en tronquant le produit $(2x - 2x^2)(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2)$ à l'ordre 2; ce qui nous donne: $f(x) = 2x - 3x^2 + o(x^2)$.

3. Donner une équation de la tangente au graphe de $f$ en $(0, f(0))$ et étudier la position de cette tangente par rapport au graphe au voisinage de $(0, f(0))$.
   Solution: en utilisant le développement limité de la question précédente, on trouve que la tangente au graphe de $f$ en $(0, f(0))$ admet pour équation $y = 2x$. Comme $f(x) - 2x = -3x^2 + o(x^2)$, on déduit que $f(x) - 2x$ est négatif au voisinage de $x_0 = 0$, donc la tangente est au dessus du graphe au voisinage de $(0, f(0))$.

4. Dans un repère orthonormé du plan, donner l'allure du graphe de $f$ au voisinage de $(0, f(0))$ et tracer la tangente au graphe en ce point.



**Exercice 2.** (6 points) Soit $f$ la fonction réelle définie par $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
   Solution: $f(x)$ est bien définie si et seulement si $x^2 \leqslant 25$, c'est-àdire $|x| \leqslant 5$. $f$ a donc pour domaine l'intervalle $[-5,5]$.
2. Calculer $f'(x)$ et préciser le domaine de validité du calcul.
   Solution: en utilisant la formule de érivé d'une fonction composée, on trouve que $f$ est dérivable sur $]-5,5[$ et que sur cet intervalle, $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$.
3. On considère la fonction $g\colon [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x)=x e^{2x}+\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$.
   Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x$.
   Solution: en utilisantla question précédente, on trouve que $\dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ admet pour primitive $-\sqrt{25-x^2}$. Une intégration par parties permet de voir que $x e^{2x}$ admet pour primitive $\dfrac{1}{2}x e^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{2x}$. On en déduit que $I=\left[\dfrac{1}{2}x e^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{2x}-\sqrt{25-x^2}\right]_0^3=\dfrac{5}{4}(e^6+1)$.

**Exercice 3.** (3 points) $\lambda$ est un nombre réel pouvant prendre une des cinq valeurs suivantes: $-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\ln(2)$, $\sqrt{2}$. Choisir parmi ces cinq nombres, une valeur pour $\lambda$ et étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\mathrm{d}x$.

Solution: si $\lambda$ est un nombre réel non nul, pour $b \geqslant 0$, posons $I(b)=\displaystyle\int_0^b e^{\lambda x}\mathrm{d}x$. On sait que $e^{\lambda x}$ admet pour primitive $\dfrac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$, ainsi, $I(b)=\dfrac{1}{\lambda}[e^{\lambda x}]_0^b=\dfrac{1}{\lambda}(e^{\lambda b}-1)$. On voit que si $\lambda>0$, alors $\displaystyle\lim_{b\longrightarrow+\infty} I(b)=+\infty$, tandisque si $\lambda<0$, $\displaystyle\lim_{b\longrightarrow+\infty} I(b)=-\frac{1}{\lambda}$; par exemple, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{5}x}\mathrm{d}x$ converge vers la valeur 5.

**Exercice 4.** (3 points)
On note $R$ le rectangle de $\mathbb{R}^2$ défini par $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 3\}$ et on considère sur ce rectangle la fonction $f$ définie par $f(x,y)=xy^2$.

Calculer l'intégrale double $I=\displaystyle\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Solution: D'après le théorème de Fubini, cette intégrale peut se calculer en faisant successivement deux intégrale simples. Intégrons d'abord par rapport à $y$ puis par rapport à $x$: pour $x$ fixé, posons $I(x)=\displaystyle\int_0^3 xy^2\mathrm{d}y$. On trouve que $I(x)=x\left[\dfrac{1}{3}y^3\right]_0^3=9x$.

En intégrant $I(x)$, on a $\displaystyle\int_0^2 I(x)\mathrm{d}x=9\int_0^2 x\,\mathrm{d}x=9\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=18$.

Conclusion: $\displaystyle\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=18$.

---