Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2005/2006

1ère SESSION - 2ème Semestre
Filière Eco-Gestion
Première Année de Licence (L1)
Mathématiques 2 (DL1EMA2)
Unité U5
Enseignant: YAMEOGO J.

Énoncé et Corrigé de l'Épreuve Écrite de Mathématiques du 4/05/06 (durée: 2 heures)

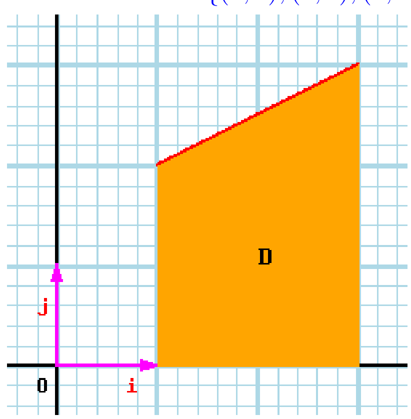
Exercice 1. (3 points)

Le plan usuel est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Sur l'intervalle $[1,3]$, on considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
Dessiner le domaine $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$ et calculer son aire $\mathcal{A}$.

b) Soit $g\colon [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{12}(-x^2 + 10x + 15)$.
Comparer $\displaystyle\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}$ et l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D.

Solution: D est le trapèze dont les sommets sont $\{(1,0),(1,2),(3,3),(3,0)\}$.



Son aire $\mathcal{A}$ se calcule facilement: $\boldsymbol{\mathcal{A} = 5}$. On remarque que $g(1) = f(1) = 2$ et $g(3) = f(3) = 3$.
Le graphe de f sur $[1,3]$ est le segment de droite joignant $(1,2)$ et $(3,3)$.
La dérivée seconde de g étant strictement négative, on en déduit que g est concave sur $[1,\ 3]$, donc $g \geqslant f$ sur l'intervalle $[1,3]$. Conclusion: on a $\displaystyle\boldsymbol{\int_1^3 g(x)\mathrm{dx} \geqslant 5}$.

Remarque: un calcul direct donne $\displaystyle\int_1^3 g(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 15x\Big]_1^3 = \frac{1}{12}\Big[60 + \frac{4}{3}\Big] > 5.$

Exercice 2. (3 points)

On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\mathrm{dx}$, $I_1 = \displaystyle\int_1^e x\ln(x)\mathrm{dx}$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e x^n \ln(x)\mathrm{dx}$. Calculer I_n.

Solution: on fait une intégration par parties en posant $\boldsymbol{u'(x)=x^n}$ et $\boldsymbol{v(x)=\ln(x)}$ (et ceci pour tout entier naturel n: I_0 correspond à $n=0$ et I_1 à $n=1$) avec $u(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ et $v'(x)=\frac{1}{x}$.
Cela donne $\int_1^e u'(x)v(x)\mathrm{d}x=\Big[u(x)v(x)\Big]_1^e-\int_1^e u(x)v'(x)\mathrm{d}x$.

Explicitement, $\int_1^e x^n\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{n+1}x^n\mathrm{d}x$. On en déduit donc $\int_1^e x^n\ln(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x)-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\right]_1^e=\frac{n}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$.

Conclusion: $\boldsymbol{I_0=1}$, $\boldsymbol{I_1=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}}$ et pour $n\geqslant 2$, $\boldsymbol{I_n=\frac{n}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}}$.

Exercice 3. (4 points)

1. Calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{dt}$ (indication: on pourra faire un changement de variable en posant $\boldsymbol{u=1+t^2}$)
2. Calculer l'intégrale $J=\int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2}\mathrm{dt}$
3. Calculer l'intégrale $K=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}+x}{3+x^2}\mathrm{dx}$
   (indication: on pourra faire un changement de variable en posant $\boldsymbol{x=\sqrt{3}t}$).

Solution:

1. En posant $u=1+t^2$, on a $\mathrm{d}u=2t\,\mathrm{d}t$, d'où $t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$ l'intégrale I s'écrit alors $\boldsymbol{I=\int_1^2 \frac{1}{2u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{u}\mathrm{d}u}$. Comme $\int_1^2 \frac{1}{u}\mathrm{d}u=[\ln(|u|)]_1^2$, on trouve $\boldsymbol{I=\frac{\ln(2)}{2}}$.
2. On a $J=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}+\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\mathrm{dt}=\Big[\arctan(x)\Big]_0^1+I$. Comme $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$ et $\arctan(0)=0$, on en déduit $\boldsymbol{J=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}}$.
3. En posant $x=\sqrt{3}t$, on a $\mathrm{dx}=\sqrt{3}\mathrm{dt}$. $K=\int_0^1\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}t}{3+3t^2}\sqrt{3}\mathrm{dt}=\int_0^1\frac{1+t}{1+t^2}\mathrm{dt}$.
   Conclusion: $\boldsymbol{K=J=\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}}$.

Exercice 4. (3 points)

Pour $\beta\geqslant 0$ on pose $I_\beta=\int_0^\beta e^{-\frac{3}{100}x}\mathrm{dx}$.

1. Calculer I_β.
2. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{100}x}\mathrm{dx}$.

Solution: $\boldsymbol{I_\beta=\left[-\frac{100}{3}e^{-\frac{3}{100}x}\right]_0^\beta=\frac{100}{3}-\frac{100}{3}e^{-\frac{3}{100}\beta}}$.

On a $\boldsymbol{\lim_{\beta\longrightarrow+\infty} I_\beta=\frac{100}{3}}$, donc l'intégrale impropre $\boldsymbol{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{3}{100}x}\mathrm{d}x}$ converge vers $\boldsymbol{\frac{100}{3}}$.

Exercice 5. (3 points)

Soit R le rectangle de $\mathbb{R}^2$ défini par $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.

Calculer $\iint_R \cos(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Solution: par le théorème de Fubini on a $\displaystyle\iint_R \cos(x-y)\mathrm{dxdy} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x-y)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy}$, en intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y. Posant $I_y = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x-y)\mathrm{dx}$, nous avons $I_y = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x-y)\mathrm{dx} = \Big[\sin(x-y)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}-y)-\sin(-y)$. Comme $\sin(-y) = -\sin(y)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-y) = \cos(y)$, on trouve $I_y = \cos(y)+\sin(y)$.

Ce qui donne $\displaystyle\iint_R \cos(x-y)\mathrm{dxdy} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos(y)+\sin(y))\mathrm{dy} = \Big[\sin(y)-\cos(y)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$

Conclusion: $\displaystyle\boldsymbol{\iint_R \cos(x-y)\mathrm{dxdy} = 2}$.

Remarque:
En utilisant les formules trigonométriques usuelles, on a $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$:
$\displaystyle\iint_R \cos(x-y)\mathrm{dxdy} = \iint_R \cos(x)\cos(y)\mathrm{dxdy} + \iint_R \sin(x)\sin(y)\mathrm{dxdy}.$
Par le théorème de Fubini on trouve
$\displaystyle\iint_R \cos(x)\cos(y)\mathrm{dxdy} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\mathrm{dx}\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(y)\mathrm{dy}\right)$ et
$\displaystyle\iint_R \sin(x)\sin(y)\mathrm{dxdy} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\mathrm{dx}\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(y)\mathrm{dy}\right)$. Cette dernière intégrale est nulle car $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(y)\mathrm{dy} = 0$ ($y\mapsto\sin(y)$ est impaire). On en déduit
$\displaystyle\iint_R \cos(x-y)\mathrm{dxdy} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\mathrm{dx}\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(y)\mathrm{dy}\right) = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\mathrm{dx}\right)^2 = 2.$

Exercice 6. (4 points)

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ de la fonction f définie par $f(x) = \sin(2x)+1$.
2. On considère la fonction g: $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{\sin(2x)+1}{1-x}$.
   Donner une équation de la tangente au graphe de g au point $(0, g(0))$ et étudier la position du graphe de g par rapport à cette tangente, au voisinage de $(0, g(0))$.

Solution:

1. Le calcul d'un développement limité de $\sin(2x)+1$ en $x_0 = 0$ se ramène au calcul d'un développement limité de $\sin(2x)$ en $x_0 = 0$. On a $\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ (en utilisant par exemple la formule de Taylor-Young). On en déduit $\boldsymbol{\sin(2x)+1 = 1+2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}$.
2. On remarque que $g(x) = f(x)\times\dfrac{1}{1-x}$. Comme $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+o(x^3)$, un en déduit le développement limité de g en $x_0 = 0$ à l'ordre 3: $g(x) = 1+3x+3x^2+\frac{5}{3}x^3+o(x^3)$.
   Nous en déduisons que la tangente au graphe de g en $(0, g(0)) = (0, 1)$ admet pour équation $\boldsymbol{y = 1+3x}$. La position du graphe de g par rapport à cette tangente au voisinage de $(0, 1)$ étant donnée par le signe de $3x^2$, nous en déduisons que **le graphe de g est au dessus de cette tangente au voisinage de $(0, 1)$**.