Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **(DL1EMA2) - Unité U5**
Année 2005/2006

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: E. AUBRY, F. HERBAUT

Feuille TD N°5 - semaine du 20 mars 2006

Exercice 1. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admettant une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]0,1[$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f(1) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

On en déduit que si $M \in \mathbb{R}_+$ est un majorant de $f^{(n+1)}$ sur $]0,1[$, alors on a l'inégalité

$$\boldsymbol{(\,*\,)\colon \left| f(1) - \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}}.$$

1. En majorant grossièrement la fonction $x \mapsto e^x$ par $M = 3$ sur l'intervalle $[0, 1]$, expliciter l'inégalité $(\,*\,)$ ci-dessus pour $n = 5$, $f(x) = e^x$ et en déduire un encadrement de e par deux nombres rationnels.
2. En majorant la fonction $x \mapsto \sin(x)$ par $M = 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$, expliciter l'inégalité $(\,*\,)$ ci-dessus pour $n = 5$, $f(x) = \sin(x)$ et en déduire un encadrement de $\sin(1)$ par deux nombres rationnels.

Exercice 2. Calculer le développement de Taylor à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ de la fonction f définie par $f(x) = 1 - \cos(3x)$.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, définie par $f(x) = \arctan(x)$.
Calculer le développement de Taylor à l'ordre 3 de f en $x_0 = -1$.

Exercice 4.

1. Calculer le développement de Taylor à l'ordre 2 en le point $x_0 = 1$ pour la fonction $f_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = 1 - 3x + x^2 + 5x^3$.
2. f_2 est une fonction réelle d'une variable réelle, définie au voisinage de $x_0 = -1$ par $f_2(x) = \sqrt{2x+3}$. Calculer le développement de Taylor à l'ordre 2 de f_2 en -1.
3. $f_3\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f_3(x) = e^{3x} - \cos(4x)$. Donner le développement de Taylor de f_3 à l'ordre 3 en $x_0 = 0$.