Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **(DL1EMA2) - Unité U5**
Année 2007/2008

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, F.-X. DEHON, J. YAMEOGO

Feuille TD N°2 - semaine du 11 février 2008

Exercice 1. (s'habituer à la technique d'intégration par parties)
Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_1^{27} \sqrt[3]{x}\,\ln(x)\mathrm{dx}, \quad \int_0^{\pi} \theta(\cos(\theta)+1)d\theta, \quad \int_0^1 (6t+100)e^{-3t}\mathrm{dt}.$$

Exercice 2. (étudier une suite d'intégrales définies)
On pose $I_0 = J_0 = \int_1^e \ln(x)\mathrm{dx}$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose
$I_n = \int_1^e x^n \ln(x)\mathrm{dx}$, $J_n = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^n}\mathrm{dx}$.

1. Calculer I_0, I_1, et J_1.
2. Pour $n \geqslant 2$, calculer I_n, J_n et dire si les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(J_n)_{\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 3. (s'habituer à la technique de changement de variable)
Calculer les intégrales suivantes:
$\int_1^9 \frac{3x}{\sqrt{2x+7}}\mathrm{dx}$ (indication: au choix, poser $u = (2x+7)$ ou $x = \frac{t^2-7}{2}$),
$\int_0^1 \frac{x}{3x+1}\mathrm{dx}$,
$\int_0^2 \frac{1+x}{4+x^2}\mathrm{dx}$

Exercice 4. (utiliser la technique appropriée pour calculer)
Calculer les intégrales suivantes: $\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{dx}$, $\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3}\mathrm{dx}$, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}$.

Exercice 5. (modéliser) Une entreprise vient d'ouvrir une usine de fabrication de stylos.
On suppose que la production journalière de cette usine est modélisée par la fonction
$f\colon [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = 4000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right)$$

où t est le nombre de jours travaillés depuis l'ouverture de l'usine ($f(t)$ étant le nombre de stylos fabriqués par jour). On suppose qu'il y a 250 jours travaillés par an.

a) Quelle sera la production journalière à la fin du trentième jour travaillé?
b) Quelle est la limite de la production journalière lorsque t tend vers $+\infty$?
c) Au total, combien de stylos cette usine aura-t-elle produits au bout de ses 30 premiers jours travaillés? Quelle est la production journalière moyenne sur les 30 premiers jours travaillés?
d) Par quelle fonction g: $[0,+\infty[$, $x \mapsto g(x)$ peut-on modéliser le nombre total de stylos qui auront été fabriqués dans cette usine au bout de x années?

Exercice 6. (encore un changement de variable)

Pour un entier naturel non nul n donné, on pose

$$\boldsymbol{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n \mathrm{d}x}.$$

a) Calculer I_1, J_1.

b) En utilisant la formule trigonométrique $(\cos(x))^2 = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$, calculer J_2.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $I_n = J_n$.
(Indication: on pourra faire un changement de variable en posant $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} - t}$)

d) Sachant que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a $\boldsymbol{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$, calculer J_4 et J_5.
