Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2008/2009

2ème SESSION - 2ème Semestre
Filière Eco-Gestion
Première Année de Licence (L1)
Mathématiques 2 - Unité U5
Enseignant: YAMEOGO J.

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES
(*les énoncés sont en bleu*)

Exercice 1. (6 points)
On considère la fonction réelle $f\colon[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par la formule

$$f(x)=\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-2,2]$.

   Solution: Commençons par remarquer que $\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$ est définie si et seulement si $1-\dfrac{2x}{5}\geqslant 0$, c'est-à-dire $x\leqslant\dfrac{5}{2}$. La fonction f de l'énoncé est ainsi bien définie.
   En utilisant les formules usuelles de dérivation de fonctions composées on trouve

   $$f'(x)=-\frac{1}{10}\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{-\frac{3}{4}} \text{ et } f''(x)=-\frac{3}{100}\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{-\frac{7}{4}}.$$

   Comme on a $\left(1-\frac{2x}{5}\right)>0$ sur l'intervalle $[-2,2]$, on en déduit que l'expression $\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{-\frac{7}{4}}$ est bien définie et positive sur $[-2,2]$, donc f'' est négative sur $[-2,2]$.

2. Donner l'approximation affine de f en $x_0=0$.
   Donner une équation de la tangente au graphe de f en $(0,f(0))$.

   Solution: L'approximation affine de f en $x_0=0$ est donnée par la fonction affine h définie au voisinage de $x_0=0$ par $h(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.
   On a $f(0)=1$ et $f'(0)=-\frac{1}{10}$, donc $h(x)=1-\frac{1}{10}x$. Une équation de la tangente au graphe de f en $(0,f(0))$ est donnée par $y=h(x)$.

3. Soit h la fonction donnant l'approximation affine de f en $x_0=0$.
   Calculer $h(1)$ et comparer $h(1)$ à $f(1)$.

   Solution: En utilisant les résultats de la question 3 ci-dessus, on trouve que $h(1)=\frac{9}{10}$. On constate que f'' est strictement négative sur $[-2,2]$, ce qui signifie que la fonction f est concave sur $[-2,2]$. On en déduit que l'approximation de $f(1)$ par $h(1)$ est une approximation par excès, donc $f(1)\leqslant h(1)$.

Exercice 2. (5 points)

Soient f et g deux fonctions réelles, dérivables à l'ordre 3 sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

On suppose que les dérivées successives de f et g sont continues sur cet intervalle et qu'au point $x_0 = 1$ on a:

- $f(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 1,\ f''(x_0) = -1,\ f^{(3)}(x_0) = 2$
- $g(x_0) = 1,\ g'(x_0) = \dfrac{1}{2},\ g''(x_0) = -\dfrac{1}{4},\ g^{(3)}(x_0) = \dfrac{3}{8}$

Calculer le développement limité à l'ordre 3 en x_0, de la fonction produit définie par $h(x) = f(x) \times g(x)$. Tracer l'allure du graphe de h au voisinage du point $x_0 = 1$.

Solution: Avec les données de l'énoncé, on peut écrire le développement limité de chacune des fonctions f et g à l'ordre 3 en $x_0 = 1$:

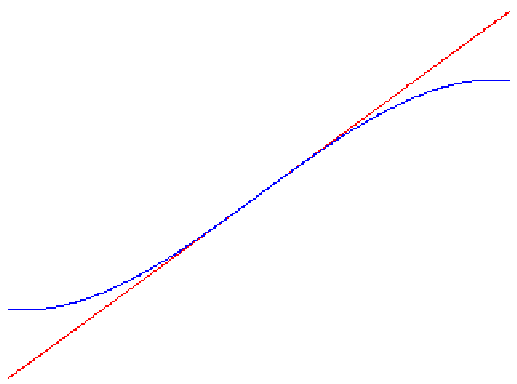
$$\begin{cases} f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \\ g(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \end{cases}.$$

On sait que la partie régulière du développement limité de $h = f \times g$ s'obtient en tronquant à l'ordre 3, le produit des développement limités de f et g. On en déduit, par une simple multiplication de polynômes, que $h(x) = (x-1) - \frac{1}{24}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

On notera que la tangente au graphe de h en $(x_0, h(x_0)) = (1, 0)$ a pour équation $y = x - 1$ et que le graphe traverse la tangente en $(1, 0)$, qui est un point d'inflexion.

On a l'allure suivante pour le graphe de h au voisinage de $(1, 0)$:

le graphe est tracé en bleu et la tangente en $(1, 0)$ est tracée en rouge



Exercice 3. (3 points)

Calculer l'intégrale définie $I = \displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x} + 3^x)\mathrm{dx}$.

Solution: Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto 3^x$ sont des fonctions usuelles et elles admettent pour primitives respectives, $x \mapsto \dfrac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(3)} 3^x$.

On en déduit que $I = \left[\dfrac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{\ln(3)} 3^x\right]_0^1 = \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{\ln(3)}\right) - \dfrac{1}{\ln(3)}$.

D'où $I = 2\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\ln(3)}\right)$.

Exercice 4. (6 points)

1. Quel est le domaine de définition de la fonction réelle f donnée par la formule $f(x)=\sqrt{3-x}$?
Déterminer un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f est dérivable et y calculer sa dérivée.

   Solution: f a pour domaine $]-\infty,3]$, elle est dérivable sur $]-\infty,3[$ et sur cet intervalle on a $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$.

2. Soit g la fonction réelle définie par $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\ln(x)$.

   a) Le domaine de définition de g est un intervalle de $\mathbb{R}$. Lequel?

   Solution: g a pour domaine l'intersection de $]-\infty,3[$ et de $]0,+\infty[$. g a donc pour domaine l'intervalle $]0,3[$.

   b) Calculer $\displaystyle\int_1^2 g(x)\mathrm{dx}$.

   Solution: Sur l'intervalle $]0,\ 3[$, la fonction $x\mapsto\ln(x)$ admet pour primitive $x\mapsto x\ln(x)-x$ (faire une intégration par parties) et la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ admet pour primitive $x\mapsto-2\sqrt{3-x}$ (d'après la question 1 ci-dessus). On en déduit que
$$\int_1^2 g(x)\mathrm{dx}=\left[-2\sqrt{3-x}+x\ln(x)-x\right]_1^2=(-4+2\ln(2))-(-2\sqrt{2}-1).$$
Ainsi $\displaystyle\int_1^2 g(x)\mathrm{dx}=-3+2\sqrt{2}+2\ln(2)$.

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to3} g(x)$.

   Solution: Lorsque x tend vers 3 en restant strictement inférieur à 3, on a $\sqrt{3-x}$ qui tend vers 0 par valeur supérieure et ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ tend vers $+\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to3} g(x)=+\infty$ car $\ln(x)$ tend vers $\ln(3)$ lorsque x tend vers 3.

   d) Pour $b\in[2,3[$, on pose $I(b)=\displaystyle\int_1^b g(x)\mathrm{dx}$.
Calculer $\lim\limits_{b\to3} I(b)$. Quelle est votre conclusion?

   Solution: En utilisant les primitives calculées à la question b) on obtient
$I(b)=\left[-2\sqrt{3-x}+x\ln(x)-x\right]_1^b=(-2\sqrt{3-b}+b\ln(b)-b)+1+2\sqrt{2}$.
On obtient facilement $\lim\limits_{b\to3} I(b)=3\ln(3)-2+2\sqrt{2}=3\ln(3)+2(\sqrt{2}-1)$.
Conclusion: l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^3 g(x)\mathrm{dx}$ converge vers $3\ln(3)+2(\sqrt{2}-1)$.
