Anneaux de Chow des variétés de Iarrobino dont le groupe de Picard est de rang 2

JOACHIM YAMEOGO Laboratoire J. A. Dieudonné, UMR CNRS 6621, Université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2, France,
e-mail : yameogo@math.unice.fr

INTRODUCTION

Soient $\mathbf{k}$ un corps algébriquement clos, $\mathbf{R}$ l'anneau des polynômes $\mathbf{k}[x,y]$. Nous noterons $\mathbf{R}_i$ le $\mathbf{k}$-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré i de $\mathbf{k}[x,y]$. Si I est un idéal homogène de $\mathbf{R}$, I_i désignera la partie homogène de degré i de I ($I_i = I \cap \mathbf{R}_i$) et t_i la dimension du $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathbf{R}_i/I_i$. La fonction de Hilbert de l'idéal homogène I est la suite d'entiers naturels

$$T = (t_0, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_q, t_{q+1}, \cdots).$$

La fonction de Hilbert d'un idéal homogène $I \subset \mathbf{R}$ de colongueur finie $n = \sum_i t_i$ est caractérisée par la propriété suivante:

$$(hilb) \quad \begin{cases} \text{il existe } d \text{ et } j \text{ deux entiers naturels, } 1 \leq d \leq j \text{ tels que:} \\ 1)\ t_i = i+1 \text{ pour } i < d \\ 2)\ t_{i+1} \leq t_i \text{ pour } i \geq d-1 \\ 3)\ t_{j+1} = 0. \end{cases}$$

Une suite d'entiers naturels T vérifiant *(hilb)* étant fixée, la variété de Iarrobino notée G_T décrit la famille des idéaux homogènes I de $\mathbf{R}$ tels que pour tout entier i on a $dim_k(\mathbf{R}_i/I_i) = t_i$. G_T est une variété irréductible, lisse et complète ([I1], Theorem 3.13). La variété G_T

admet une décomposition cellulaire (via une $\mathbf{k}^*$-action sur $\mathbf{R}$ comme l'a fait L. Göttsche (dans [Gö]) ou à l'aide d'une stratification utilisant les bases de Gröbner). Dans cette décomposition cellulaire, les cellules sont en bijection avec les idéaux monômiaux de $\mathbf{R}$ ayant la fonction de Hilbert T. Disposant ainsi d'une $\mathbb{Z}$-base du groupe de Chow $CH(G_T)$, la question naturelle qui se pose alors est la description de la structure multiplicative de ce groupe. Une telle description donnerait une généralisation du calcul classique de Schubert que l'on connaît sur les grassmanniennes. A. Iarrobino et l'auteur ont déjà calculé dans [IY2] l'anneau de Chow $CH^*(G_T)$ pour certaines fonctions de Hilbert particulières. Notons au passage que pour ces fonctions de Hilbert particulières qui sont de la forme $T = (1, 2, 3, \cdots, d, d, \cdots, d, 1, 0)$ A. Iarrobino a montré ([I2]) que les variétés G_T sont des désingularisations naturelles des variétés des d-sécantes de courbes rationnelles normales d'espaces projectifs.

Nous abordons ici la description de l'anneau de Chow des variétés G_T qui sont aussi "simples" que possibles et qui ne soient pas des grassmanniennes.

Dans le paragraphe §1 nous expliquons ce que nous entendons par "simples" et donnons une description de ces variétés G_T dites "simples". Sous l'hypothèse que la fonction de Hilbert T est indécomposable (voir Définition 1.1), on a deux types de G_T "simples". Pour l'un et l'autre type, on utilise le Théorème 1.3 pour calculer dans le §2 la classe $[G_T]$ de G_T dans le produit de deux grassmanniennes (ou dans le produit d'un espace projectif et d'une grassmannienne). Le Théorème 2.2 de A. King et C. Walter [K-W] nous permet ensuite de déterminer l'anneau $CH^*(G_T)$. Pour chacun des deux types de G_T "simples" nous donnons au §3 des exemples illustratifs. Nous indiquons, lorsque les grassmanniennes en présence sont en fait des espaces projectifs, comment en écrivant les équations de G_T, on en déduit sa classe $[G_T]$ (remarques 3-A.4 et 3-B.2).

1 Les G_T "simples"

Définition 1.1 Soit $T = (t_0, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_{j-1}, t_j, 0)$ $(t_j > 0)$ une fonction de Hilbert.

1) On appelle *ordre* de T, l'entier naturel $d(T) = inf\{i/t_i \neq i+1\}$.
   On appellera *premier palier* de T, l'entier naturel $\delta(T) = max\{i/t_{d(T)+i} = t_{d(T)}\}$.

2) On dira que la fonction de Hilbert T est *décomposable* s'il existe deux entiers a et b tels que $(a < b)$ et $(t_{a-1} > t_a = t_{a+1} = \cdots = t_b > t_{b+1})$. Une fonction de Hilbert non décomposable est dite *indécomposable.*

Etant donné une fonction de Hilbert $T = (t_0, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_{j-1}, t_j, 0)$ d'ordre $d(T) = d$, on sait que la variété G_T se plonge tout naturellement dans un produit de variétés grassmanniennes:

$$\begin{array}{rcl} \phi \; : \quad G_T & \hookrightarrow & \prod_{i=d}^{j} Grass(i+1-t_i, i+1) \\ I & \longmapsto & (I_d, I_{d+1}, \cdots, I_j) \end{array}$$

Pour des raisons de clarté des calculs, nous supposerons que la fonction de Hilbert T n'est pas décomposable (définition 1.1). En effet on montre que si T est décomposable, la variété G_T est isomorphe à un produit $G_{T'} \times G_{T''}$ où T' et T'' sont de longueurs plus petites que T.

Supposant T indécomposable, on voit que le premier cas à considérer est celui où G_T n'est pas une grassmannienne et se plonge dans le produit de deux grassmanniennes seulement. C'est le cas si et seulement si $rang(Pic(G_T)) = 2$ (voir par exemple [IY1]). Nous dirons donc que la variété G_T est "simple" si T est indécomposable et $rang(Pic(G_T)) = 2$.

Les deux types de G_T "simples"

Soit $T = (t_0, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_j, 0)$ une fonction de Hilbert indécomposable d'ordre d et dont le premier palier est de longueur δ. On supposera que $t_d \neq 0$, sinon G_T est réduit à un point. L'hypothèse d'indécomposabilité de T fait que l'on a: $\delta = 0$ ou $(\delta \neq 0$ et $t_d = d)$. Si en plus $rang(Pic(G_T)) = 2$, on a les deux types de fonctions de Hilbert suivantes:

$$\begin{array}{l} \mathbb{T}_0 \; (\delta = 0) : \; T = (1, 2, \cdots, d-1, d, t_d, t_{d+1}, 0) \text{ avec } t_d > t_{d+1} \; (j = d+1) \\ \mathbb{T}_1 \; (\delta > 0) : \; T = (1, 2, \cdots, d, d, \cdots, d, t_{d+\delta+1}, 0) \text{ avec } j = d + \delta + 1. \end{array}$$

On a alors les plongements suivants, selon que $\delta = 0$ ou $\delta > 0$:

$$\begin{array}{l} G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} Grass(d+1-t_d, d+1) \times Grass(d+2-t_{d+1}, d+2) \\ G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbf{P}^d \times Grass(d+\delta+2-t_{d+\delta+1}, d+\delta+2). \end{array}$$

Le modèle d'un idéal homogène ayant la fonction de Hilbert "simple" T est l'idéal monômial $E = \left\{ (y^l x^{d-l})_{t_d \leq l \leq d}, (y^p x^{d+\delta+1-p})_{t_{d+\delta+1} \leq p \leq d+\delta+1}, (y^q x^{d+\delta+2-q})_{0 \leq q \leq d+\delta+2} \right\}$ qui peut être représenté par l'un des escaliers suivants:

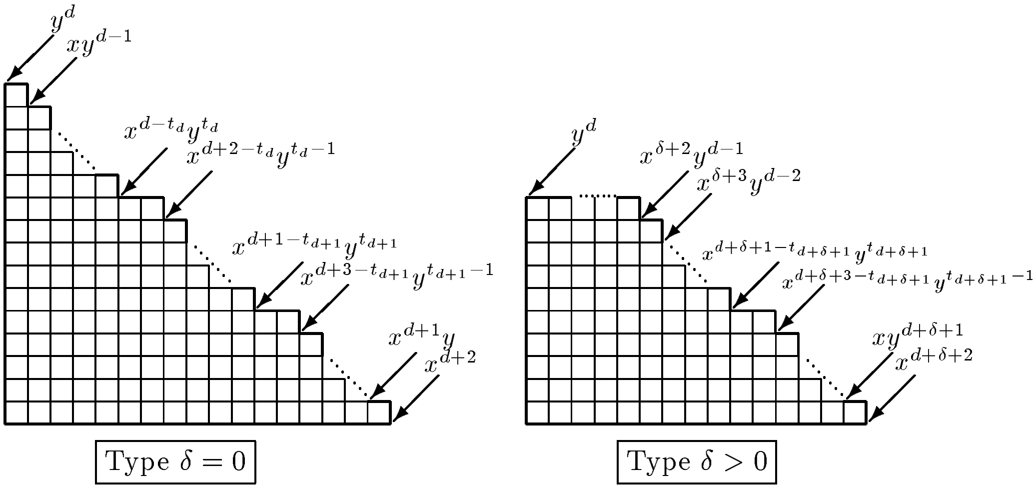

Figure 1: Model d'un ideal monômial "simple"

Remarque 1.2 Si $T = (t_0, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_{d+\delta+1}, 0)$ est une fonction de Hilbert "simple" d'ordre d et dont le premier palier est de longueur δ, la variété G_T compte

$$\binom{d+1-t_{d+\delta+1}}{t_d-t_{d+\delta+1}} \times \binom{t_d+1}{t_{d+\delta+1}} \text{ cellules.}$$

C'est le nombre d'idéaux monômiaux de R ayant la fonction de Hilbert T (voir [IY2] Theorem 5.2).

Pour un entier i, nous noterons $\mathbb{G}_i$ la grassmannienne $Grass(i+1-t_i, i+1)$. Soit $\mathcal{S}_i$ (resp. $\mathcal{Q}_i$) le pull-back du sous-fibré tautologique (resp. fibré quotient tautologique) de $\mathbb{G}_i$ sur le produit des grassmanniennes. On a le théorème suivant (voir [Y2], Théorème 4.4):

Théorème 1.3 *Soit $T = (t_0, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_{d+\delta+1}, 0)$ une fonction de Hilbert "simple" d'ordre d et dont le premier palier est de longueur δ. Alors la variété G_T est le lieu des zéros d'une section du fibré*

$$\mathcal{H} = [\mathbf{R}_{1+\delta} \otimes \mathcal{S}_d]^\vee \otimes \mathcal{Q}_{d+1+\delta}$$

et la codimension de G_T dans le produit $\mathbb{G}_d \times \mathbb{G}_{d+1+\delta}$ est égal au rang de $\mathcal{H}$.

Ce théorème a été démontré dans [Y2] pour une fonction de Hilbert indécomposable quelconque.

2 Anneaux de Chow des G_T "simples"

Nous allons d'abord calculer en utilisant le Théorème 1.3, la classe de G_T dans le produit de grassmanniennes $\mathbb{G}_d \times \mathbb{G}_{d+1+\delta}$. Un théorème (Théorème 2.2) de A. King et C. Walter nous permettra ensuite de donner une description de l'anneau $CH^*(G_T)$ lorsque T est "simple".

Soit $\mathcal{S}_i$ (resp. $\mathcal{Q}_i$) le pull-back du sous-fibré tautologique (resp. fibré quotient tautologique) de $\mathbb{G}_i$ sur le produit des grassmanniennes. On a la proposition suivante:

Proposition 2.1 *La classe de G_T dans $\mathbb{G}_d \times \mathbb{G}_{d+1+\delta}$ est donnée par*

$$\phi_*[G_T] = [det(a_{uv})_{1\leq u,v\leq d+1-t_d}]^{(2+\delta)}$$

$$\textit{où} \quad a_{uv} = \sum_{l=0}^{t_{d+1+\delta}-u+v} c_l(\mathcal{Q}_{d+1+\delta}) \cdot c_{t_{d+1+\delta}-u+v-l}(\mathcal{Q}_d),$$

les $c_l(\mathcal{Q}_i)$ désignant les classes de Chern des fibrés quotients.

Preuve: Si E est un fibré vectoriel de rang r sur une variété X, $c_t(E)$ désignera le polynôme de Chern de E, et $c_{top}(E) = c_r(E)$. Le théorème 1.3 ci-dessus nous dit que $\phi_*[G_T] = c_{top}(\mathcal{H})$, où

$$\mathcal{H} = [\mathbf{R}_{1+\delta} \otimes \mathcal{S}_d]^\vee \otimes \mathcal{Q}_{d+1+\delta}.$$

Nous avons $\mathcal{H} = [\mathcal{S}_d^\vee \otimes \mathcal{Q}_{d+1+\delta}]^{\oplus(2+\delta)}$, d'où $c_t(\mathcal{H}) = [c_t(\mathcal{S}_d^\vee \otimes \mathcal{Q}_{d+1+\delta})]^{(2+\delta)}$.

Soient r' le rang du fibré $\mathcal{H}' = \mathcal{S}_d^\vee \otimes \mathcal{Q}_{d+1+\delta}$, et r le rang de $\mathcal{H}$. On a $c_r(\mathcal{H}) = [c_{r'}(\mathcal{H}')]^{(2+\delta)}$ avec $r' = (d+1-t_d)\cdot t_{d+1+\delta}$.

Soient $\{-\beta_m\}_{1\leq m\leq d+1-t_d}$ les racines de Chern de $c_t(\mathcal{S}_d^\vee)$ et $\{\alpha_n\}_{1\leq n\leq t_{d+1+\delta}}$ celles de $c_t(\mathcal{Q}_{d+1+\delta})$. On a $c_{r'}(\mathcal{H}') = \prod_{m,n}(\alpha_n - \beta_m)$, ce qui donne, en utilisant les identités déterminantales (voir [Fu], Appendix A.9):

$$c_{r'}(\mathcal{H}') = \Delta_{t_{d+1+\delta}}^{(d+1-t_d)}(\mathcal{Q}_{d+1+\delta} - \mathcal{S}_d) = |c_{t_{d+1+\delta}-u+v}|_{1\leq u,v\leq d+1-t_d}$$

$$\text{avec} \quad c_{t_{d+1+\delta}-u+v} = \sum_{l=0}^{t_{d+1+\delta}-u+v} c_l(\mathcal{Q}_{d+1+\delta}) \cdot c_{t_{d+1+\delta}-u+v-l}(\mathcal{Q}_d).$$

On en déduit le résultat de la proposition.

Formule 1 (Cas où $\delta = 0$) *Si T est une fonction de Hilbert "simple" dont le premier palier est de longueur $\delta = 0$, on a $G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{G}_d \times \mathbb{G}_{d+1}$ et la proposition 2.1 donne*

$$\phi_*[G_T] = [det(a_{uv})_{1\leq u,v\leq d+1-t_d}]^2$$

$$\textit{avec} \quad a_{uv} = \sum_{l=0}^{t_{d+1}-u+v} c_l(\mathcal{Q}_{d+1}) \cdot c_{t_{d+1}-u+v-l}(\mathcal{Q}_d).$$

Formule 2 (Cas où $\delta > 0$) *Soit T une fonction de Hilbert "simple" d'ordre d et dont le premier palier est de longueur $\delta > 0$. On a alors $t_d = d$,*

$$G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^d \times \mathbb{G}_{d+1+\delta}$$

et la proposition 2.1 nous donne

$$\phi_*[G_T] = \left[\sum_{l=0}^{t_{d+1+\delta}} c_l(\mathcal{Q}_{d+1+\delta}) \cdot \zeta^{t_{d+1+\delta}-l} \right]^{(2+\delta)}$$

où les $c_l(\mathcal{Q}_{d+1+\delta})$ sont les classes de Chern du fibré quotient $\mathcal{Q}_{d+1+\delta}$ et ζ est la classe du pull-back d'une section hyperplane de $\mathbb{P}^d$.

Théorème 2.2 (A. King - C.Walter)
Soit $T = (t_0, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_j, 0)$ une fonction de Hilbert indécomposable d'ordre d dont le premier palier est de longueur δ. Soit $G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{G}_d \times \prod_{i=d+\delta+1}^{j} \mathbb{G}_i$ le plongement naturel de G_T dans le produit de variétés grassmanniennes, alors

$$\phi^* : CH^*(\mathbb{G}_d \times \prod_{i=d+\delta+1}^{j} \mathbb{G}_i) \longrightarrow CH^*(G_T) \text{ est surjectif.}$$

Corrolaire 2.3 *L'anneau de Chow $CH^*(G_T)$ est isomorphe à*

$$\left(\frac{CH^*\left(\mathbb{G}_d \times \prod_{i=d+\delta+1}^{j} \mathbb{G}_i\right)}{annulateur(\phi_*[G_T])} \right).$$

3 Exemples

3-A Exemples de G_T "simples" à premier palier de longueur $\delta = 0$

Exemple 3-A.1 $T = (1, 2, 3, 2, 1, 0)$. On a $G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} Grass(2, 4) \times Grass(4, 5)$.
Notant σ_1, σ_2 les classes des pull-backs des cycles de Schubert spéciaux de $Grass(2, 4)$ et ζ la classe du pull-back d'une section hyperplane de $\mathbb{P}^4$, nous obtenons à l'aide de la formule 1,

$$\phi_*[G_T] = [(\sigma_1 + \zeta)^2 - (\sigma_2 + \sigma_1\zeta)]^2 = [(\sigma_1^2 - \sigma_2) + \sigma_1\zeta + \zeta^2]^2.$$

Soit N l'annulateur de $\phi_*[G_T]$ dans $A^* = CH^*(Grass(2, 4) \times Grass(4, 5))$, et $N^p = N \cap A^p$ $(0 \leq p \leq 8)$. On obtient par de simples calculs, en utilisant les relations

$$(\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = 0,\ \sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2) = 0,\ \zeta^5 = 0) :$$

- $N^0 = 0$

- $N^1 = 0$
- $N^2 = < 4\sigma_2 - 3\sigma_1\zeta + 2\zeta^2 >$
- $N^3 = < 4\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_1^2\zeta + 4\zeta^3,\ \sigma_2\zeta - \zeta^3,\ \sigma_1\zeta^2 - 2\zeta^3 >$
- $N^4 = < \sigma_2^2 - \zeta^4,\ \sigma_1\sigma_2\zeta - 2\zeta^4,\ \sigma_1^2\zeta^2 - 4\zeta^4,\ \sigma_2\zeta^2 - \zeta^4,\ \sigma_1\zeta^3 - 2\zeta^4 >$
- $N^p = A^p,\ 5 \leq p \leq 8$

On en déduit que $CH^*(G_T) \cong \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \zeta]/J$ où $J = (4\sigma_2 - 3\sigma_1\zeta + 2\zeta^2, \sigma_2\zeta - \zeta^3, \sigma_1\zeta^2 - 2\zeta^3, \sigma_1^2\zeta^2 - 4\zeta^4, \sigma_2^2 - \zeta^4, \sigma_1\sigma_2\zeta - 2\zeta^4, \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2, \zeta^5)$.

Plus généralement si T est une fonction de Hilbert de la forme $T = (1, 2, \cdots, d-1, d, d-1, 1, 0)$, on a $G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} Grass(2, d+1) \times Grass(d+1, d+2)$ et si σ_l sont les classes des pull-backs des cycles de Schubert spéciaux de $Grass(2, d+1)$ et ζ la classe du pull-back d'une section hyperplane de $\mathbb{P}^{d+1}$, alors

$$\phi_*[G_T] = [(\sigma_1 + \zeta)^2 - (\sigma_2 + \sigma_1\zeta)]^2.$$

Exemple 3-A.2 $T = (1, 2, 3, 3, 2, 0)$. On a $G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^3 \times Grass(3, 5)$. Soient ζ la classe du pull-back d'une section hyperplane de $\mathbb{P}^3$ et σ_l les classes des pull-backs des cycles de Schubert spéciaux de $Grass(3, 5)$, nous obtenons toujours à l'aide de la formule 1,

$$\phi_*[G_T] = [\zeta^2 + \zeta\sigma_1 + \sigma_2]^2.$$

Exemple 3-A.3 $T = (1, 2, 3, 3, 1, 0)$. Dans cet exemple, la variété G_T se plonge dans le produit de deux espaces projectifs, $\mathbb{P}^3$ et $\mathbb{P}^4$. La classe de G_T dans le produit $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$ est encore donnée par la formule 1:

$$\phi_*[G_T] = (\zeta + \eta)^2$$

où ζ (resp. η) est la classe d'une section hyperplane de $\mathbb{P}^3$ (resp. $\mathbb{P}^4$).

Remarque 3-A.4 (Alternative à la formule 1)
Soit $T = (1, 2, \cdots, d-1, d, d, 1, 0)$ une fonction de Hilbert. La variété G_T se plonge alors tout naturellement dans le produit de deux espaces projectifs, $\mathbb{P}^d$ et $\mathbb{P}^{d+1}$:

$$\begin{array}{ccc} G_T & \longrightarrow & \mathbb{P}(R_d) \times \mathbb{P}(R_{d+1}^\vee) \\ I & \hookrightarrow & (I_d, I_{d+1}^\perp) \end{array}.$$

On a $dim(G_T) = 2d - 1$. Prenons pour base de R_i, le système de monômes $(x^l y^{i-l})_{0 \leq l \leq i}$, soient $\underline{X} = (X_0, \ldots, X_d)$ et $\underline{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{d+1})$ les systèmes de coordonnées homogènes associés sur $\mathbb{P}(R_d)$ et $\mathbb{P}(R_{d+1}^\vee)$ respectivement.

On a $(\underline{X}, \underline{Z}) \in G_T$ si et seulement si $\begin{pmatrix} Z_0 & \ldots & Z_d \\ Z_1 & \ldots & Z_{d+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

G_T est donc une intersection complète définie dans $\mathbb{P}(R_d) \times \mathbb{P}(R_{d+1}^\vee)$ par les équations:

$$\sum_{i=0}^{d} X_i Z_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{d} X_i Z_{i+1} = 0.$$

Par le plongement de Segré

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^{d+1} & \rightarrow & \mathbb{P}^{(d+1)(d+2)-1} \\ (\underline{X}, \underline{Z}) & \longmapsto & (X_i Z_j) \end{array},$$

en prenant $(U_{ij})_{0\leq i\leq d, 0\leq j\leq d+1}$ pour coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^{(d+1)(d+2)-1}$, $\varphi(\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^{d+1})$ admet pour équations

$$U_{lk}U_{ij} - U_{lj}U_{ik} = 0, \ 0 \leq l < i, \ 0 \leq k < j.$$

$\varphi(G_T)$ est l'intersection de $\varphi(\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^{d+1})$ avec les deux hyperplans d'équations

$$\sum_{i=0}^{d} U_{ii} = 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{d} U_{i,i+1} = 0.$$

Si h est le classe d'une section hyperlane de $\mathbb{P}^{(d+1)(d+2)-1}$, on a $[\varphi(G_T)] = h^2 \cdot [\varphi(\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^{d+1})] = \varphi_*([G_T])$, d'où $[G_T] = \varphi^*(h^2) = (\zeta + \eta)^2$, où ζ (resp. η) est la classe d'une section hyperlane de $\mathbb{P}^d$ (resp. $\mathbb{P}^{d+1}$).

3-B Exemples de G_T "simples" à premier palier de longueur $\delta > 0$

Exemple 3-B.1 *(Cas particulier où la fonction de Hilbert est telle que $t_{d+1+\delta} = 1$)*
On se donne deux entiers naturels positifs d et δ et on considère la fonction de Hilbert $T(d, \delta)$ définie par:

$$\begin{cases} \bullet\ t_i = i + 1 \ \text{ pour } \ 0 \leq i \leq d - 1 \\ \bullet\ t_i = d \ \text{ pour } \ d \leq i \leq d + \delta \\ \bullet\ t_{d+\delta+1} = 1 \\ \bullet\ t_i = 0 \ \text{ pour } \ i > d + \delta + 1. \end{cases}$$

La variété $G_{T(d,\delta)}$ est de dimension $2d - 1$ et se plonge dans $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^{d+1+\delta}$:

$$\begin{array}{rcl} G_{T(d,\delta)} & \rightarrow & \mathbb{P}(R_d) \times \mathbb{P}(R_{d+1+\delta}^\vee) \\ I & \hookrightarrow & (I_d, I_{d+1+\delta}^\perp). \end{array}$$

La formule 2 nous donne $[G_{T(d,\delta)}] = (\zeta + \eta)^{\delta+2}$ où ζ (resp. η) désigne la classe d'une section hyperplane de $\mathbb{P}^d$ (resp. $\mathbb{P}^{d+1+\delta}$). Il ne nous reste plus qu'à calculer l'annulateur de $(\zeta + \eta)^{\delta+2}$ dans $\left(\mathbb{Z}[\zeta, \eta]/(\zeta^{d+1}, \eta^{j+1})\right)$ pour avoir l'anneau de Chow de $G_{T(d,\delta)}$.

Soit $f = (\zeta+\eta)^{\delta+2}$, il s'agit de déterminer l'idéal $J = \Big((\zeta^{d+1}, \eta^{j+1}) : f\Big)$ de $\mathbb{Z}[\zeta,\eta]$. Il suffit alors d'écrire: $\eta^{j+1} = (\eta+\zeta-\zeta)^{j+1}$ pour avoir

$$\begin{array}{rcl} \eta^{j+1} & = & \sum_{l=0}^{l=\delta+1} \left(\begin{array}{c} j+1 \\ l \end{array} \right) (\zeta+\eta)^l (-\zeta)^{j+1-l} \\ & & + \sum_{l=0}^{l=d} \left(\begin{array}{c} j+1 \\ d-l \end{array} \right) (\zeta+\eta)^{l+\delta+2} (-\zeta)^{d-l}. \end{array}$$

On en déduit que l'annulateur de $[G_{T(d,\delta)}]$ est

$$J = \left(\zeta^{d+1}, \sum_{l=0}^{l=d} \left(\begin{array}{c} j+1 \\ d-l \end{array} \right) (\zeta+\eta)^l (-\zeta)^{d-l} \right).$$

D'où $CH^*(G_{T(d,\delta)}) \cong (\mathbb{Z}[\zeta,\eta]/J)$. Pour cet exemple, des formules explicites de la multiplication dans $CH^*(G_{T(d,\delta)})$ *(utilisant un codage des idéaux monômiaux associés à T)* se trouvent dans [IY1].

Remarque 3-B.2 (Alternative à la formule 2) Pour la fonction de Hilbert $T(d,\delta)$ ci-dessus, on sait que l'on a un plongement naturel

$$\begin{array}{rcl} G_{T(d,\delta)} & \hookrightarrow & \mathbb{P}(R_d) \times \mathbb{P}(R^\vee_{d+1+\delta}) \\ I & \longmapsto & (I_d, I^\perp_{d+1+\delta}). \end{array}$$

Comme à la remarque 3-A.4, prenons pour base de R_i, le système de monômes $(x^l y^{i-l})_{0\le l\le i}$. Soient $\underline{X} = (X_0,\dots,X_d)$ et $\underline{Z} = (Z_0,\dots,X_{d+1+\delta})$ les systèmes de coordonnées homogènes associés sur $\mathbb{P}(R_d)$ et $\mathbb{P}(R^\vee_{d+1+\delta})$ respectivement. On a $(\underline{X},\underline{Z}) \in G_{T(d,\delta)}$ si et seulement si

$$\left(\begin{array}{lll} Z_0 & \dots & Z_d \\ Z_1 & \dots & Z_{d+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{1+\delta} & \dots & Z_{d+1+\delta} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} X_0 \\ \vdots \\ X_d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right).$$

$G_{T(d,\delta)}$ est donc une intersection complète définie dans $\mathbb{P}(R_d) \times \mathbb{P}(R^\vee_{d+1+\delta})$ par les $\delta+2$ équations:

$$\sum_{i=0}^{d} X_i Z_{i+l} = 0,\ 0 \le l \le 1+\delta.$$

On en déduit alors l'expression

$$[G_{T(d,\delta)}] = (\zeta+\eta)^{\delta+2} \text{ dans le produit } \mathbb{P}(R_d) \times \mathbb{P}(R^\vee_{d+1+\delta}).$$

3-C Une table de multiplication pour l'exemple 3-A.2

Dans l'exemple 3-A.2 où $T=(1,2,3,3,2,0)$, on a vu que $G_T \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(R_3)\times Grass(3,R_4)$ et si ζ est la classe du pull-back d'une section hyperplane de $\mathbb{P}(R_3)$, σ_l les classes des pull-backs des cycles de Schubert spéciaux de $Grass(3,5)$, nous obtenons

$$\phi_*[G_T]=(\zeta^2+\zeta\sigma_1+\sigma_2)^2.$$

Nous allons dans ce paragraphe décrire une $\mathbb{Z}$-base du groupe de Chow $CH(G_T)$ pour cet exemple et écrire la structure multiplicative de $CH(G_T)$ en termes de cette base.

Une forme linéaire non nulle $u=ax+by\in R$ étant fixée, on peut considérer (pour un idéal homogène $I\subset R$ de colongueur finie) la suite d'entiers naturels $n_u(I)=(n_1,n_2,\ldots,n_i,\ldots)$ où $n_i=dim_k\left(R/(I+u^iR)\right)$.

Les fonctions $n_i: I\longmapsto dim_k\left(R/(I+u^iR)\right)$ sont semi-continues supérieurement sur G_T (T fonction de Hilbert quelconque). On montre (voir par exemple [Y1]) que pour $\underline{n}$ fixé, la strate $S_{\underline{n}}=\{I\in G_T | n_i=dim_k\left(R/(I+u^iR)\right)\quad \text{pour tout } i\}$ est isomorphe à un espace affine. Ce sont précisément les classes d'équivalence rationnelles des adhérences de ces strates qui donnent une $\mathbb{Z}$-base du groupe de Chow $CH(G_T)$.

Pour l'exemple $T=(1,2,3,3,2,0)$ nous allons prendre $u=x$ et considérer pour $I\in G_T$ la suite des entiers $n_i=dim_k\left(R/(I+x^iR)\right)$. Puisque pour $i\geq 5$ on a $x^iR\subset I$, nous aurons $n_i=11$ pour $i\geq 5$. Il suffit donc de considérer $\underline{n}=(n_1,n_2,n_3,n_4)$. Dans cet exemple nous avons 12 possibilités pour $\underline{n}$, donc 12 cellules pour G_T.

Idéal monômial type	$\underline{n}(I)$	Cellules
$I=(y^3,x^2y^2,x^4y,x^5)$	$(3,6,8,10)$	A_0 - codimension 0 -
$I=(xy^2,y^4,x^4y,x^5)$	$(4,6,8,10)$	A_1 - codimension 1 -
$I=(y^3,x^3y,x^5)$	$(3,6,9,10)$	B_1 - codimension 1 -
$I=(x^2y,y^4,x^5)$	$(4,8,9,10)$	A_2 - codimension 2 -
$I=(xy^2,x^3y,y^5,x^5)$	$(5,7,9,10)$	B_2 - codimension 2 -
$I=(y^3,x^4,x^3y^2$	$(3,6,9,11)$	C_2 - codimension 2 -
$I=(x^3,y^4,x^2y^3)$	$(4,8,11,11)$	A_3 - codimension 3 -
$I=(x^2y,xy^3,y^5,x^5)$	$(5,8,9,10)$	B_3 - codimension 3 -
$I=(xy^2,x^4,y^5)$	$(5,7,9,11)$	C_3 - codimension 3 -
$I=(x^3,xy^3,y^5)$	$(5,8,11,11)$	A_4 - codimension 4 -
$I=(x^2y,x^4,xy^4,y^5)$	$(5,9,10,11)$	B_4 - codimension 4 -
$I=(x^3,x^2y^2,xy^4,y^5)$	$(5,9,11,11)$	A_5 - codimension 5 -

Figure 2: Cellules de G_T pour $T=(1,2,3,3,2,0)$

Sur cet exemple on peut vérifier qu'une strate $S_{\underline{n'}}$ est contenue dans l'adhérence d'une strate $S_{\underline{n}}$ si et seulement si $n'_i \geq n_i$ pour tout i. *(Cette propriété n'est pas vraie pour tout T).*

Reprenant les notations du paragraphe §2, soit $\mathcal{S}_3$ (resp. $\mathcal{S}_4$) le pull-back sur G_T du sous-fibré tautologique de $\mathbb{P}(R_3)$ (resp. $Grass(3, R_4)$). On a:

- $\overline{A}_0 = G_T$
- $\overline{A}_1$ est le lieu des couples $(V, W) \in G_T \subset \mathbb{P}(R_3) \times Grass(3, R_4)$ où le morphisme canonique $\mathcal{S}_3 \longrightarrow (R_3/xR_2)$ est nul.
  $\boxed{[\overline{A}_1] = \phi^*(\zeta)}$
- $\overline{B}_1$ est le lieu des couples $(V, W) \in G_T \subset \mathbb{P}(R_3) \times Grass(3, R_4)$ où le morphisme canonique $\mathcal{S}_4 \longrightarrow (R_4/x^3R_1)$ est de rang au plus 2.
  $\boxed{[\overline{B}_1] = \phi^*(\sigma_1)}$
- $\overline{A}_2$ est le lieu des couples $(V, W) \in G_T \subset \mathbb{P}(R_3) \times Grass(3, R_4)$ où le morphisme canonique $\mathcal{S}_3 \longrightarrow (R_3/x^2R_1)$ est nul.
  $\boxed{[\overline{A}_2] = \phi^*(\zeta^2)}$
- $\overline{B}_2$ est le lieu des couples $(V, W) \in G_T \subset \mathbb{P}(R_3) \times Grass(3, R_4)$ où le morphisme canonique $\mathcal{S}_4/x\mathcal{S}_3 \longrightarrow (R_4/xR_3)$ est nul.
  $\boxed{[\overline{B}_2] = \phi^*(\sigma_1\zeta - 2\zeta^2)}$
- $\overline{C}_2$ est le lieu des couples $(V, W) \in G_T \subset \mathbb{P}(R_3) \times Grass(3, R_4)$ où le morphisme canonique $\mathcal{S}_4 \longrightarrow (R_4/ < x^4 >)$ est de rang au plus 2.
  $\boxed{[\overline{C}_2] = \phi^*(\sigma_2)}$

Des propriétés analogues peuvent être considérées pour les adhérences des autres cellules.

Soient a_l, b_l et c_l les classes d'équivalence rationnelle de $\overline{A}_l$, $\overline{B}_l$ et $\overline{C}_l$ respectivement. On a alors la table suivante, donnant la structure multiplicative de $CH(G_T)$:

$$CH^*(G_T) \cong \frac{\mathbb{Z}[a_1, b_1, c_2]}{(3a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 - c_2, 2a_1^3 - 7a_1^2b_1 + 4a_1b_1^2 - b_1^3, a_1^4)}$$

$\times$	a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3	a_4	b_4	a_5
a_0	a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3	a_4	b_4	a_5
a_1	a_1	a_2	$2a_2 + b_2$	a_3	b_3	$3a_3 + c_3$	0	a_4	$2a_4 + b_4$	0	a_5	0
b_1	b_1	$2a_2 + b_2$	$a_2 + 2b_2 + c_2$	$2a_3 + b_3$	c_3	$2a_3 + 2c_3$	a_4	$2a_4 + b_4$	$a_4 + 2b_4$	a_5	0	0
a_2	a_2	a_3	$2a_3 + b_3$	0	a_4	$2a_4 + b_4$	0	0	a_5	0	0	0
b_2	b_2	b_3	c_3	a_4	b_4	0	0	a_5	0	0	0	0
c_2	c_2	$3a_3 + c_3$	$2a_3 + 2c_3$	$2a_4 + b_4$	0	$2a_4 + 3b_4$	a_5	0	0	0	0	0
a_3	a_3	0	a_4	0	0	a_5	0	0	0	0	0	0
b_3	b_3	a_4	$2a_4 + b_4$	0	a_5	0	0	0	0	0	0	0
c_3	c_3	$2a_4 + b_4$	$a_4 + 2b_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_4	a_4	0	a_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_4	b_4	a_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_5	a_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figure 3: Table de multiplication de $CH(G_T)$ pour $T = (1, 2, 3, 3, 2, 0)$.

Références

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer-Verlag, New-York, 1984.

[Gö] L. Göttsche, *Betti-numbers for the Hilbert function strata of the punctual Hilbert scheme in two variables*, Manuscripta Math., **66**, p. 253-259, 1990.

[I1] A. Iarrobino, *Punctual Hilbert Schemes*, Memoirs of AMS, vol.**10**, #188, (1977), AMS, Providence.

[I2] A. Iarrobino, *A desingularisation of the secant bundle to the rational normal curve*, (notes, 1996, 7p.)

[IY1] A. Iarrobino and J. Yaméogo, *Graded Ideals in* $k[x,y]$ *and Partitions I: partitions of diagonal lengths* T *and the hook code*, 48 p., preprint (1994).

[IY2] A. Iarrobino and J. Yaméogo, *Graded Ideals in* $k[x,y]$ *and Partitions II: Ramifications and a Generalisation of Schubert Calculus.* 42p., preprint # 496 Septembre 1997 (Nice).

[K-W] A. King and C. Walter, *On Chow rings of fine moduli spaces of modules*, J. reine angew. Math. **461** (1995), 179-187.

[Y1] J. Yaméogo, *Décomposition cellulaire de variétés paramétrant des idéaux homogènes de* $\mathbb{C}[[x,y]]$. *Incidence des cellules I*, Compositio Math. **90**, 81-98, 1994.

[Y2] J. Yaméogo, *Fibrés en droites amples sur des familles idéaux homogènes de* $\mathbb{C}[x,y]$. à paraître dans Europroj Proceedings (Catania 93 - Barcelona 94).